Corso di Laurea in Fisica – Meccanica dei Sistemi – A. A. 2007-2008

Esercizio da consegnare <u>lunedì 26 Maggio 2008</u>

Nome …………………………Cognome ……………………………

Tre punti materiali di uguale massa $m_1 = m_2 = m_3 = m$ sono connessi in serie da due molle ideali, anch'esse uguali fra loro, di costante elastica *k* e lunghezza a riposo nulla. Il sistema si trova in un riferimento inerziale per il quale scegliamo l'asse *z* parallelo e concorde alla forza di gravità.
Inizialmente (t < 0) la massa m_1 è mantenuta da un vincolo alla quota $z_1(t<0)=0$, e le altre due masse m_2 e m_3 si trovano in equilibrio statico lungo la verticale, rispettivamente alle quote $z_2(t<0)>0$ e $z_3(t<0)>z_2(t<0)$.
All'istante t = 0, la massa m_1 viene sganciata dal vincolo. Da quel momento in poi (t > 0), date le condizioni iniziali, il moto avviene solo verticalmente (moto unidimensionale).

(1) Qual è il modulo della **reazione vincolare** *R* esercitata dal vincolo su m_1 per t < 0 ? [5]
Le forze esterne agenti sul sistema sono la reazione vincolare e la forza peso. Per t < 0 il sistema è in equilibrio ($\vec{Q}=0$).
Dalla prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi si ha quindi: $\vec{F}^{(e)}_{TOT} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, che proiettata lungo l'asse z da:
$-R+3mg=0 \Rightarrow R=3mg$

(2) Quali sono le **posizioni di equilibrio** $z_2(t<0)$ e $z_3(t<0)$delle masse m_2 e m_3 per t < 0 ? [5+5]
Esprimiamo le condizioni di equilibrio statico per il centro di massa e per ciascuna delle tre masse, considerando per queste l'azione di *forze esterne* e *forze interne* (forze elastiche) e tenendo conto del *terzo principio della dinamica* (azione e reazione), per cui $f_{12} = -kz_2$, $f_{12} = -f_{21}$ e $f_{23} = -k(z_3 - z_2)$, $f_{23} = -f_{32}$. Nello scrivere l'espressione delle forze elastiche si è tenuto conto del fatto che le molle hanno lunghezza a riposo nulla e che la quantità $z_3 - z_2$ rappresenta la deformazione della molla che connette le masse m_2 e m_3

$$\begin{array}{ll}
\textit{(c.d.m.)} & \left\{\begin{array}{l}
-R+3mg=0 \Rightarrow R=3mg \qquad \text{(dalla risposta al primo quesito)} \\
-R+mg+f_{21}=0 \Rightarrow -3mg+mg+kz_2=0 \Rightarrow kz_2=2mg \Rightarrow z_2=\dfrac{2mg}{k} \\
f_{12}+mg+f_{32}=0 \Rightarrow -kz_2+mg+k(z_3-z_2)=0 \Rightarrow kz_3+mg-2kz_2=0 \Rightarrow kz_3=3mg \Rightarrow z_3=\dfrac{3mg}{k} \\
f_{23}+mg=0 \qquad \text{(sostituendo } f_{23} \text{ si trova l'analogo risultato per } z_3\text{)}
\end{array}\right. \\
\textit{(m}_1\textit{)} & \\
\textit{(m}_2\textit{)} & \\
\textit{(m}_3\textit{)} &
\end{array}$$

(3) Qual è la posizione iniziale $z_c(t<0)$ del **centro di massa** del sistema (per t < 0) ? [5]

Dalla definizione di centro di massa, $z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{m\left(0+\frac{2mg}{k}+\frac{3mg}{k}\right)}{3m} = \frac{1}{3}\frac{5}{k}mg$

(4) Qual è la **legge oraria** $z_c(t)$ del moto del centro di massa del sistema per t > 0 ? [5]
Il moto del centro di massa è descritto dalla prima equazione cardinale. Per t > 0, venendo meno la reazione del vincolo, la risultante delle forze esterne è data dalla forza peso risultante agente sul sistema. Proiettando l'equazione nella direzione del moto, e tenendo conto che $\frac{dQ}{dt} = ma_c$ si ha: $3mg = 3ma_c$, ovvero il centro di massa è soggetto ad una accelerazione costante pari all'accelerazione di gravità $a_c = g$. La legge oraria che descrive il moto del centro di massa è quindi la legge di un moto uniformemente accelerato, con condizioni iniziali date dalla posizione iniziale del centro di massa, ovvero: $z_c(t) = \frac{5}{3}\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}gt^2$

(5) Qual è la quota z_c* raggiunta dal centro di massa all'istante t* = $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$? [5]

Sostituendo t* nella legge oraria (risposta al quarto quesito) si trova $z_c^* = \frac{5}{3}\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{4}\frac{m}{k}\right) = \frac{43}{24}\frac{mg}{k}$