Corso di Laurea in Fisica – Meccanica Classica – A. A. 2007-2008

Prof. A. Capone – Dr. Giulia De Bonis **Prova in classe del 2 Aprile 2008**

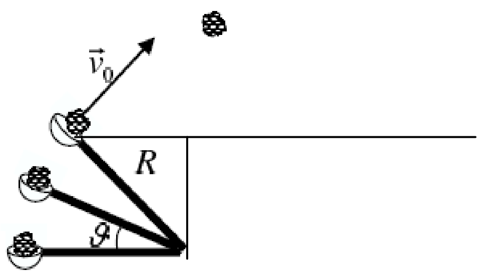
Nome …………………………. **Cognome ……………………………**

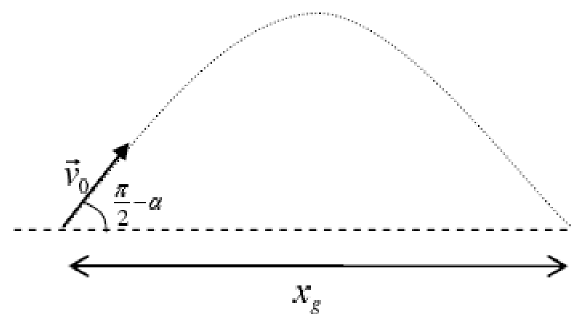
ESERCIZIO 1: Una catapulta è costituita da un braccio di lunghezza R che ruota intorno ad un perno di un angolo θ (calcolato rispetto al piano orizzontale). All'estremità della catapulta è poggiato un masso (vedi figura). La catapulta, inizialmente ferma all'angolo θ=0 viene messa in moto con accelerazione angolare costante uguale a C. Ad un certo angolo α il moto del braccio viene bruscamente interrotto ed il masso, libero da vincoli, si comporta come un grave in caduta libera. Calcolare:

(1) accelerazione tangenziale e **accelerazione normale** del masso durante il lancio, per $\theta = \frac{\alpha}{2}$ [3+3]

(2) la **gittata x_G** del masso, il **tempo di volo** e le **componenti della** sua **velocità al momento dell'impatto al suolo** (usare l'approssimazione che il masso venga lanciato dalla quota del punto di impatto con il suolo) [3+3+3]

Dati numerici: g=9.81 ms^{-2}; R=5.00 m; α = 35.0°; C=100 rad s^{-2}





(1) $\dot{\omega} = C$ accelerazione angolare costante

$\omega(t) = Ct \;\Rightarrow\; \mathrm{v}(t) = R\omega(t) = RCt$ **;** $\theta(t) = \frac{1}{2}Ct^2$ e **t_1** tale che: $\theta(t_1) = \frac{1}{2}Ct_1^{\,2} = \frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{C}}$

$|a_T| = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = RC = 500\,\mathrm{m/s^2}$ **;** $|a_N| = \left.\frac{\mathrm{v}^2}{R}\right|_{t=t_1} = \frac{(RCt_1)^2}{R} = \frac{R^2C^2\,\alpha/C}{R} = RC\alpha = 305\,\mathrm{m/s}$

(2) t_2 tale che: $\theta(t_2) = \frac{1}{2}Ct_2^{\,2} = \alpha \;\Rightarrow\; t_2 = \sqrt{\frac{2\alpha}{C}}$

$$|\vec{\mathrm{v}}(t_2)| = RCt_2 = R\sqrt{2\alpha C} = \mathrm{v}_0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathrm{v}_{x0} = \mathrm{v}_0\cos\left(\pi/2 - \alpha\right) = \mathrm{v}_0\sin(\alpha) = 31.7\,\mathrm{m/s} \\ \mathrm{v}_{y0} = \mathrm{v}_0\sin\left(\pi/2 - \alpha\right) = \mathrm{v}_0\cos(\alpha) = 45.3\,\mathrm{m/s} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \mathrm{x}_0 = 0 \\ \mathrm{y}_0 = 0 \end{cases}$$

Condizioni iniziali per il moto parabolico

$$\begin{cases} a_{x0} = 0 \\ a_{y0} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{v}_x(t) = \mathrm{v}_0\sin(\alpha) \\ \mathrm{v}_y(t) = \mathrm{v}_0\cos(\alpha) - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}(t) = \mathrm{v}_0\sin(\alpha)t \\ y(t) = \mathrm{v}_0\cos(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

t* = tempo di volo tale che: $y(t^*) = 0 = \mathrm{v}_0\cos(\alpha)t^* - \frac{1}{2}g(t^*)^2 \;\Rightarrow\; t^* = \frac{2\mathrm{v}_0\cos(\alpha)}{g} = 9.24\,\mathrm{s}$

x_G = gittata = $x(t^*) = \frac{2\mathrm{v}_0^{\,2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g} = 293\,\mathrm{m}$ **;** $\begin{cases} \mathrm{v}_x(t^*) = \mathrm{v}_{x0} \\ \mathrm{v}_y(t^*) = -\mathrm{v}_{y0} \end{cases}$

ESERCIZIO 2: Una piattaforma parallela al suolo ruota con velocità angolare ω costante attorno ad un asse ortogonale al piano della piattaforma stessa. Sia $S'(O',x',y',z')$ un sistema di riferimento solidale con la piattaforma, avente l'asse z' sempre coincidente con l'asse di rotazione, e sia S(O,x,y,z) un sistema di riferimento fisso, con asse z ed origine in comune con S'. Al tempo t=0, quando gli assi x' ed y' coincidono rispettivamente con x e y, un punto materiale è lanciato dall'origine delle coordinate, con velocità $\vec{v}_0'$ di componenti (nel sistema S') $\vec{v}_0' \equiv (v_0 \cos\theta, 0, v_0 \sin\theta)$. Si determini:

(1) la legge oraria del moto nel sistema S [2+2+2]

(2) le 3 componenti, nel sistema S', del vettore posizione $\vec{r}\,'(t^*)$, dove t* è il tempo in cui il punto materiale ricade sulla piattaforma. [3+3+3]

Dati numerici: $g=9.81\ \mathrm{ms^{-2}}$; $\omega=0.0920\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$; $\theta=81.0°$; $v_0=3.11\ \mathrm{ms^{-1}}$

(1) La relazione tra la velocità $\vec{v}$ nel sistema S e la velocità $\vec{v}\,'$ nel sistema S' è $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_t$

con $\vec{v}_t$ = velocità di trascinamento = $\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'$ ($\vec{V}$ è la velocità dell'origine O' nel sistema S, $\vec{r}\,'$ è il vettore posizione del punto materiale nel sistema S'). Al tempo t=0 $\vec{v}_0 = \vec{v}_0'$ ($\vec{V} = 0$ e $\vec{r}_0' = 0$)

$$\begin{cases} a_{x0} = 0 \\ a_{y0} = 0 \\ a_{z0} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{v}_x(t) = \mathrm{v}_0 \cos(\theta) \\ \mathrm{v}_y(t) = 0 \\ \mathrm{v}_z(t) = \mathrm{v}_0 \sin(\theta) - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}(t) = \mathrm{v}_0 \cos(\theta) t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \mathrm{v}_0 \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

(2) La trasformazione di coordinate dal sistema S al sistema S' è definita dalla relazione $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R è una matrice unitaria che descrive la rotazione (antioraria) del piano xy con velocità angolare ω. Gli elementi di R tengono conto delle condizioni iniziali del problema: al tempo t=0, infatti, S coincide con S' e la matrice R coincide con la matrice identità I.

Il punto materiale ricade sulla piattaforma nell'istante **t*** tale che $z(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \dfrac{2\mathrm{v}_0 \sin(\theta)}{g} = 0.626\,\mathrm{s}$

$$\vec{r}(t^*) = \begin{cases} \mathrm{x}(t^*) = \dfrac{2\mathrm{v}_0^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{g} \\ y(t^*) = 0 \\ z(t^*) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{r}\,'(t^*) = R(t^*)\vec{r}(t^*) \Rightarrow \vec{r}\,'(t^*) = \begin{cases} \mathrm{x}'(t^*) = \mathrm{x}(t^*)\cos(\omega t^*) = 0.304\,\mathrm{m} \\ y'(t^*) = -\mathrm{x}(t^*)\sin(\omega t^*) = -0.018\,\mathrm{m} \\ z'(t^*) = 0 \end{cases}$$