

# Linea di trasmissione - Teoria e pratica

(Un'introduzione per il corso di Laboratorio di Elettromagnetismo e Circuiti)

G. D'Agostini

8 giugno 2003

## 1 Introduzione

Prendiamo un circuito formato da un generatore in corrente continua e da tanti resistori in serie che formino una sola maglia (tipo 'collanina' di resistenze incontrata in laboratorio, vedi Fig. 1). Un interruttore permette di aprire (ovvero *spegnere*)

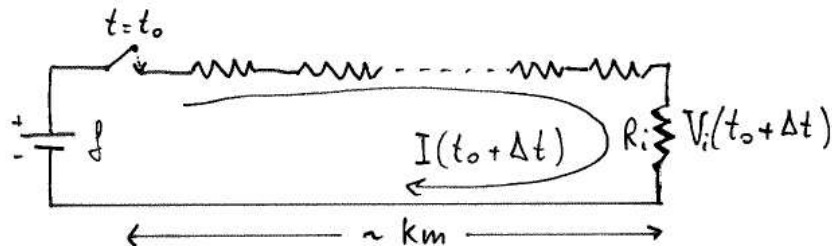


Figura 1: Circuito di resistenze di 'grandi' dimensioni

e chiudere (*accendere*) il circuito. Inizialmente il circuito è aperto. Sia  $f$  la forza elettromotrice ai capi del generatore,  $R_i$  la generica resistenza e  $R_t = \sum_i R_i$  l'equivalente della serie. Ad un certo istante  $t = 0$  si chiude il circuito. La teoria dei circuiti insegnata nel corso di Fisica Generale e nelle prime lezioni del corso di Laboratorio prevede che, *istantaneamente*, si stabilisca una corrente  $I = f/R_t$  e tensioni  $V_i = R_i I$  ai capi dei resistori. Lo stesso vale quando alimentiamo il circuito in regime sinusoidale o accendiamo ad una tensione continua costante un circuito che contiene capacità e/o induttanze: anche quando la corrente varia con il tempo, si ipotizza che essa sia la stessa in tutti i tratti della maglia (i principi di Kirchhoff si basano proprio su tale assunto). Si capisce subito che il modello non può funzionare quando il circuito ha 'grandi' dimensioni, ad esempio decine, centinaia di metri o più, in quanto il modello prevede la trasmissione istantanea di informazione. Se questo è vero, il problema sussiste anche quando si tratta solo di circuiti di una decina di centimetri, dimensioni tipiche dei circuiti di laboratorio. In entrambi i casi (dimensioni grandi o piccole rispetto alla scala umana) l'approssimazione di istantaneità vale quando le scale tipiche della variabilità dei segnali con il tempo sono molto più grandi dei tempi di propagazione dei segnali stessi lungo il circuito. Se prendiamo come velocità massima di propagazione la velocità della luce  $c$ , che, espressa nella comoda unità di misura cm/ns (centimetri al nanosecondo), vale 30

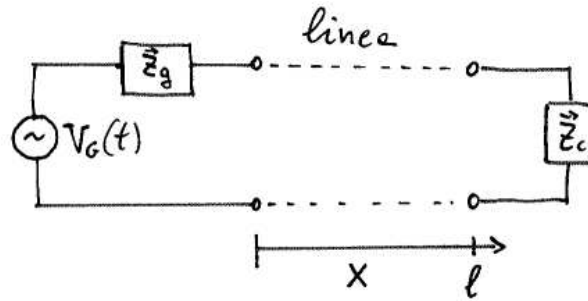


Figura 2: Schema generale di linea di trasmissione

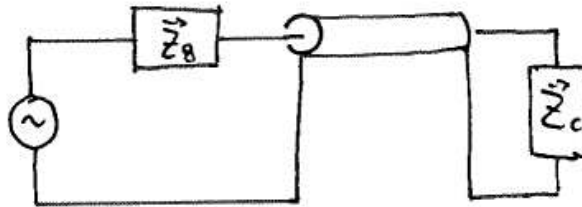


Figura 3: Schema di linea di trasmissione coassiale

cm/ns e ipotizziamo che i segnali si propagano con velocità prossima a  $c$  arriviamo alle seguenti considerazioni qualitative. Per circuiti di dimensioni della decina di centimetri otteniamo ritardi di  $\approx 1$  ns, che per segnali sinusoidali aventi questo periodo, corrisponde a  $\nu \approx 1$  GHz. Quindi, possiamo trattare bene con l'approssimazione istantanea segnali alternati aventi frequenza di molti MHz, ma non di GHz o più.

In questa nota cerchiamo di analizzare il comportamento di quello che può essere considerato il circuito elementare per trasportare segnali su 'grandi' distanze, ovvero della cosiddetta linea di trasmissione (la trattazione di un circuito complesso di 'grandi' dimensioni va al di là degli intenti di questa nota). Come realizzazioni pratiche delle linee di trasmissioni si può pensare alle linee telefoniche 'classiche' a fili volanti su pali di legno, a 'doppini' telefonici che abbiamo nelle case, a cavi coassiali tipo quelli delle antenne o da laboratorio, linee bifilari (tipo 'piattine' elettriche), o piste di rame su schede di circuiti.

## 2 Linea come sistema a costanti distribuite

Nel modo più generale, schematizziamo la linea di trasmissione come due conduttori che connettono un *generatore* e un *carico* (Fig. 2). Il generatore è caratterizzato da una tensione  $V_g(t)$  e una impedenza interna in serie  $\vec{Z}_g$ . In Fig. 3 la linea è rappresentata come cavo coassiale. Il carico è caratterizzato da una impedenza  $\vec{Z}_c$ . Le impedenze sono in notazione complessa in quanto, ad esempio, il circuito che rappresenta il generatore potrebbe essere l'equivalente di Thévenin di un circuito ben più complicato di quello mostrato. Lo stesso dicasi del carico. In molti casi pratici (ad esempio generatore di segnali di laboratorio)  $\vec{Z}_G$  si riduce ad una semplice  $R_G$ .

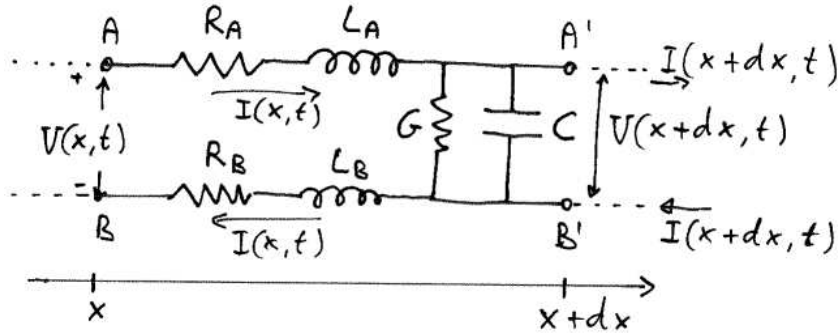


Figura 4: Schema a costanti distribuite della linea di trasmissione.

Anche il carico è schematizzabile spesso da una semplice resistenza. Ma già il carico dovuto all'ingresso di un oscilloscopio contiene un termine capacitivo in serie non trascurabile.

Schematizziamo il carico con due conduttori paralleli aventi caratteristiche indipendenti dalla posizione e dal tempo (linee uniformi). Con riferimento alla Fig. 4, introduciamo le seguenti grandezze:

$R_A$  è la *resistenza* del conduttore  $A$  nel tratto  $dx$ , dovuta alla resistività del cavo. Considerando una resistenza unitaria  $R_{A_u}$  per unità di lunghezza,  $R_A$  è data da  $R_{A_u} dx$ .

$R_B$  rappresenta l'analogha grandezza per il conduttore  $B$ .

$L_A$  è l'*induttanza* del tratto  $dx$  che, nuovamente, può essere espressa come  $L_{A_u} dx$ , ove  $L_{A_u}$  è l'induttanza per unità di lunghezza.

$L_B$  rappresenta l'analogha grandezza per il conduttore  $B$ .

$G$  è la *conduttanza* fra i due conduttori nel tratto di cavo considerato, dovuta al fatto che l'isolamento fra essi non è perfetto. In termini della conduttanza per unità di lunghezza  $G_u$ , essa è data da  $G = G_u dx$ .

$C$  è la *capacità* fra i due tratti di conduttore ed è anch'essa espressa in termini della capacità per unità di lunghezza come  $C = C_u dx$ .

Fra le posizioni  $x$  e  $x + dx$  lungo la linea tensione e corrente variano in quanto ci sono *cadute di tensioni*, dovute a  $R$  e  $L$ , e *perdite di corrente*, dovute a  $G$  e  $C$ .

## 2.1 Cadute di tensione

Nel tratto superiore ( $A$ ), tenendo conto del verso prescelto per la corrente, abbiamo:

$$dV_A = V_{A'}(x + dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) \quad (1)$$

$$dV_B = V_{B'}(x + dx, t) - V_B(x, t) = +R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) \quad (2)$$

da cui, sommando membro a membro,

$$\begin{aligned} V(x + dx, t) - V(x, t) &= [V_{A'}(x + dx, t) - V_{B'}(x + dx, t)] - [V_A(x, t) - V_B(x, t)] \\ &= -(R_A + R_B) I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$= -R I(x, t) - L \frac{\partial}{\partial t} I(x, t), \quad (4)$$

$$= -\left(R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}\right) I(x, t) dx \quad (5)$$

ove  $R$  sta per la somma delle resistenze,  $L$  sta per la somma delle induttanze e i simboli contrassegnati con  $u$  indicano le stesse *grandezze per unità di lunghezza*. In altre parole, quello che conta è la somma di  $R_u$  e  $L_u$  e non i singoli contributi. Per questo motivo, si trova spesso in letteratura la convenzione di considerare resistenza e induttanza unitarie solo in un conduttore, intendendo che siano la somma di queste grandezze per ciascun conduttore. L'uso delle *derivate parziali* è dovuto al fatto che le grandezze in questione dipendono dalla posizione e dal tempo ed è quindi importante distinguere fra variazioni dovute puramente alla distanza (derivata parziale), dal fatto che muovendosi lungo  $x$  con una velocità finita la variazione della grandezza fisica è dovuta anche alla variazione del tempo. Si noti inoltre come il simbolo  $dV$  nelle (1) e (2) può non essere propriamente corretto, in quanto i membri a destra delle equazioni (1) e (2) 'sembrano' grandezze finite e non infinitesimi. In realtà, anch'esse sono infinitesimi, in quanto  $R_A$  e  $R_B$  dipendono da  $dx$ , come detto introducendo le costanti distribuite e come viene esplicitato nel seguito [Eq. (5)].

Si noti anche la doppia origine della caduta di tensione e il loro diverso effetto sulla propagazione del segnale. Il termine ohmico  $-R_u I(x, t) dx$  produce una graduale caduta di tensione a mano a mano che ci si allontana dal generatore. Il termine induttivo  $-L_u \frac{\partial}{\partial t} I(x, t) dx$  dipende invece dal segno della derivata di  $I$  rispetto al tempo. Provoca una diminuzione di  $V$  se l'intensità di corrente in  $x$  cresce nel tempo, ma può anche provocarne un aumento se essa decresce. Siccome la variazione in  $x$  della tensione può essere espressa come

$$V(x + dx, t) - V(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx, \quad (6)$$

confrontando quest'ultima con la (5) otteniamo

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -\left(R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}\right) I(x, t), \quad (7)$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -\{Z_u\} I(x, t), \quad (8)$$

avendo introdotto l'operatore

$$\{Z_u\} = -\left(R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}\right). \quad (9)$$

## 2.2 ‘Perdite’ di corrente

In modo analogo ci ricaviamo la variazione di corrente nel tratto  $dx$ . Essa è dovuta al non perfetto isolamento ( $G \neq 0$ ) e al fatto che una parte della carica serve a caricare il condensatore  $C$  presente fra i conduttori nel tratto  $dx$ . Il primo termine è dovuto alla legge di Ohm (scritta in termini della conduttanza)

$$dI(x, t)^{(R)} = -G V(x, t), \quad (10)$$

mentre il termine dovuto al condensatore è pari a

$$dI(x, t)^{(C)} = -\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}, \quad (11)$$

$$= -C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \quad (12)$$

(per l’uso improprio di  $dI$  si veda la nota a proposito di un analogo uso di  $dV$  nel paragrafo precedente). I segni sono conseguenza dei versi indicati in Fig. 4:

- $V(x, t) > 0$  implica  $V_A(x, t) > V_B(x, t)$  e quindi la corrente  $dI$  fluisce dal conduttore  $A$  al conduttore  $B$ .
- $\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}$  implica che il condensatore  $C$  si sta caricando e quindi una corrente positiva fluisce dal conduttore  $A$  al condensatore (contemporaneamente una corrente negativa fluisce da  $B$  all’altra armatura del condensatore).

Si noti come, mentre la corrente dovuta a  $G$  è definitivamente persa ai fini dell’energia del segnale, quella dovuta alla capacità è restituita ai conduttori in tempi successivi (durante la restituzione,  $\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} < 0$  e quindi  $dI(x, t)^{(C)} > 0$ ). Questo effetto è di più facile comprensione se ci si ricorda dell’analogia *condensatore-molla* con  $k \leftrightarrow 1/C$ . Infatti, è questo effetto, insieme a quello legato all’*inerzia* introdotta dall’induttanza ( $m \leftrightarrow L$ ) a far oscillare il sistema e farlo agire ‘da supporto’ per la propagazione di onde (come vedremo fra breve).

Ricapitolando, facendo uso delle (10) e (10) e in analogia alle (6) e (7), abbiamo

$$dI(x, t) = I(x + dx, t) - I(x, t) = -\left(G + C \frac{\partial}{\partial t}\right) V(x, t) \quad (13)$$

$$= -\left(G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}\right) V(x, t) dx \quad (14)$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} dx = -\left(G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}\right) V(x, t) dx, \quad (15)$$

ovvero

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\left(G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}\right) V(x, t) \quad (16)$$

$$= -\{Y_u\} V(x, t), \quad (17)$$

avendo introdotto l’operatore

$$\{Y_u\} = G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \quad (18)$$

in analogia a  $\{Z_u\}$ . In termini degli operatori  $\{Z_u\}$  e  $\{Y_u\}$  e, ricordandoci che formalmente possiamo attribuire  $\{Z_u\}$  solo ad un conduttore, possiamo rappresentare la linea di trasmissione con l’equivalente raffigurato in Fig. 5.

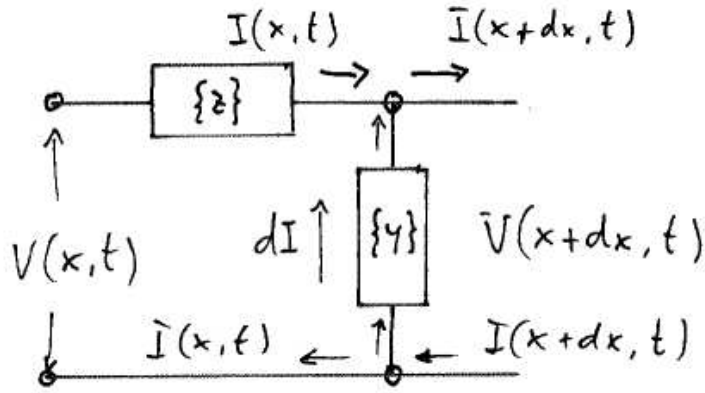


Figura 5: Schema equivalente della linea di trasmissione in funzione degli operatori  $\{Z_u\}$  e  $\{Y_u\}$  sui quali si basano le equazioni differenziali che regolano la propagazione del segnale lungo la linea.

### 3 Equazioni differenziali della linea di ritardo

Riassumendo, le equazioni che regolano la propagazione di tensione e corrente lungo la linea di trasmissione sono

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = - \left( R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right) I(x, t), \quad (19)$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = - \left( G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right) V(x, t). \quad (20)$$

Da queste equazioni, date le condizioni al contorno si ottiene la soluzione specifica del problema. Invece di addentrarci nel caso più generale possibile, analizziamo due casi particolari, ma ancora abbastanza generali per comprendere diversi aspetti del problema. In un caso ci concentriamo su segnali di tipo sinusoidali. Esso è importante perché permette di studiare il comportamento della linea in funzione della frequenza anche tenendo conto di effetti dissipativi ( $R \neq 0$ ,  $G \neq 0$ ). L'altro caso riguarda la soluzione generale delle onde nel solo caso non dissipativo.

### 4 Regime sinusoidale (soluzione stazionaria)

Se la linea di trasmissione è connessa ad un generatore di tensione sinusoidale, si possono riscrivere le cadute di tensione e perdite di corrente usando il metodo simbolico. In questa approssimazione, si assume, come avveniva nella soluzione dei circuiti  $RC$  e  $RCL$  che, dato il termine *forzante* sinusoidale, dopo un tempo abbastanza lungo gli effetti dei transienti si siano smorzati e tutte le grandezze di interesse (tensioni e correnti nei vari tratti) oscillino con la stessa frequenza del generatore (ovvero stessa pulsazione  $\omega$ ). Questo non vuol dire ignorare gli effetti di propagazione non istantanea delle informazioni. Infatti, come si vedrà, differiranno fasi e ampiezze nei vari tratti. La differenza di fase in funzione della distanza sta a indicare la propagazione dell'onda. La variazione di ampiezza è dovuta alle attenuazioni resistive.

Introducendo l'*impedenza*  $\vec{Z}$  e *ammettenza*  $\vec{Y}$  e facendo uso del risultato del paragrafo 2.1 secondo il quale possiamo attribuire formalmente le cadute di tensione

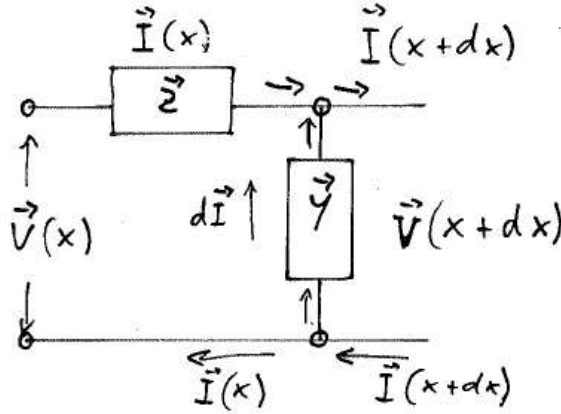


Figura 6: Schema equivalente della linea di trasmissione in funzione di impedenza e ammettenza complessa  $\vec{Z}$  e  $\vec{Y}$ .

al solo conduttore  $A$ , otteniamo le seguenti espressioni per  $\vec{Z}$  e  $\vec{Y}$  (vedi Fig. 6):

$$\vec{Z} = R + j \omega L \quad (21)$$

$$= \vec{Z}_u dx = (R_u + j \omega L_u) dx \quad (22)$$

$$\vec{Y} = G + j \omega C \quad (23)$$

$$= \vec{Y}_u dx = (G_u + j \omega C_u) dx, \quad (24)$$

ove  $\vec{Z}_u$  e  $\vec{Y}_u$  rappresentano impedenza e ammettenza per unità di lunghezza. Indicando con  $\vec{V}(x)$  e  $\vec{I}(x)$  le grandezze del metodo simbolico associate a  $V$  e  $I$  (le quali, ricordiamo, possono contenere delle fasi ma non la dipendenza temporale, fattorizzata da  $e^{\omega t}$ ), abbiamo per le variazioni di lungo  $x$ :

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x} dx = -\vec{Z} \vec{I}(x) = -\vec{Z}_u \vec{I}(x) dx \quad (25)$$

$$d\vec{I} = \frac{\partial \vec{I}(x, t)}{\partial x} dx = -\vec{Y} \vec{V}(x) = -\vec{Y}_u \vec{V}(x) dx, \quad (26)$$

ovvero

$$\frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x} = -\vec{Z}_u \vec{I}(x) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \vec{I}(x)}{\partial x} = -\vec{Y}_u \vec{V}(x). \quad (28)$$

Derivando entrambe le equazioni rispetto a  $x$  otteniamo

$$\frac{\partial^2 \vec{V}(x)}{\partial x^2} = -\vec{Z}_u \frac{\partial \vec{I}(x)}{\partial x} = [\vec{Z}_u \vec{Y}_u] \vec{V}(x) \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{I}(x)}{\partial x^2} = -\vec{Y}_u \frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x} = [\vec{Z}_u \vec{Y}_u] \vec{I}(x), \quad (30)$$

dette *equazioni dei telegrafisti* (Lord Kelvin), che possono essere riscritte in funzione del parametro complesso  $\gamma = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u}$ , detto *parametro di propagazione*, in quanto

descrive la modalità di propagazione dell'onda lungo la linea:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \vec{V}(x) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{I}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \vec{I}(x) = 0, \quad (32)$$

Queste equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti hanno soluzioni del tipo  $c_1 e^{-\gamma x} + c_2 e^{+\gamma x}$ .

#### 4.1 Tensione in funzione della posizione e del tempo

Dalla (31) otteniamo la variazione di ampiezza e fase della tensione con la distanza. Esprimendo la soluzione in funzione delle costanti complesse  $A_1$  e  $A_2$  (esse contengono delle fasi, ovvero  $\vec{A}_i = A_i e^{j\phi_i}$ ), abbiamo

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{\gamma x} \quad (33)$$

$$= \vec{A}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \vec{A}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (34)$$

ove sono state introdotti i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  dati, rispettivamente, dalla parte reale e dalla parte immaginaria di della costante di propagazione  $\gamma$ :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} \quad (35)$$

$$= \sqrt{(R_u + j\omega L)(G_u + j\omega C)}. \quad (36)$$

$\alpha$  è la *costante di attenuazione* e  $\beta$  la *costante di fase* (o di *slittamento di fase*, 'phase-shift' in inglese) per il loro ruolo nella propagazione dell'onda [vedi Eq. (39)]. Per ottenere la soluzione fisica  $V(x, t)$ , usando la solita regola alla base del metodo simbolico, trasformiamo  $\vec{V}(x)$  in un vettore ruotante moltiplicandolo per  $e^{j\omega t}$  e prendiamo successivamente la parte reale del prodotto:

$$V(x, t) = \text{Re} \left\{ \vec{V}(x) e^{j\omega t} \right\} \quad (37)$$

$$= \text{Re} \left\{ A_1 e^{j\phi_1} e^{(-\alpha-j\beta)x} e^{j\omega t} + A_2 e^{j\phi_2} e^{+(\alpha-j\beta)x} e^{j\omega t} \right\} \quad (38)$$

$$= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2). \quad (39)$$

Si riconosce la sovrapposizione di due onde che viaggiano, rispettivamente, nel verso di  $x$  crescente e decrescente (onde *progressive* e *regressive*. La loro ampiezza varia esponenzialmente con  $x$  per via delle dissipazioni. Si riconosce quindi che l'onda progressiva è quella associata ad  $A_1$ , l'ampiezza della quale decresce al crescere di  $x$  (l'altra onda cresce con  $x$  in quanto viene, anch'essa attenuandosi, da  $x$  grandi). Per ricavare in altro modo il verso di propagazione e la sua velocità, analizziamo la variazione di fase con  $x$  dell'onda associata a  $A_1$ . La velocità (*di fase*)  $v$  di un'onda può essere definita la velocità con la quale un osservatore deve viaggiare lungo la linea per vedere sempre la stessa fase dell'onda (ad esempio un massimo, indipendentemente dal fatto che, per effetto delle dissipazioni, il valore del massimo varia con la posizione). La condizione di fase costante

$$\omega t - \beta x + \phi_1 = \text{cost} \quad (40)$$



si traduce in

$$\frac{d}{dt}[\omega t - \beta x + \phi_1] = 0, \quad (41)$$

ovvero

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (42)$$

#### 4.1.1 Soluzione stazionaria di $V$ nel caso non dissipativo

Per meglio capire quanto valga, almeno in prima approssimazione, la velocità di propagazione dell'onda di  $V(x, t)$ , consideriamo il caso ideale non dissipativo, ovvero  $R_u = 0$  e  $G_u = 0$ . L'espressione di  $\gamma$  si riduce a

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_u C_u}, \quad (43)$$

ovvero  $\alpha = 0$  e  $\beta = \omega \sqrt{L_u C_u}$ . La velocità di fase diventa quindi, facendo uso della (42)

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}. \quad (44)$$

$\alpha = 0$  indica che le onde si propagano lungo la linea senza subire attenuazioni. L'espressione di  $V(x, t)$  si riduce quindi a

$$V(x, t) = A_1 \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi_1] + A_2 \cos[\omega(t + \frac{x}{v}) + \phi_2]. \quad (45)$$

È anche utile introdurre  $\tau_0 = \sqrt{L_u C_u}$ , avente le dimensioni di un tempo per unità di lunghezza. Nei casi in cui  $1/\sqrt{L_u C_u}$  ha il significato di velocità dell'onda,  $\tau_0$  indica un ritardo per unità di lunghezza (spesso, nelle applicazioni pratiche di laboratorio, le linee di trasmissione sono usate come *linee di ritardo*).

#### 4.1.2 Soluzione stazionaria di $V$ nel caso non distorto

Riprendiamo l'espressione di  $\gamma$  nel caso generale ( $R \neq 0$ ,  $G \neq 0$ ). Riscriviamo la (36) come

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{-\omega^2 + j\omega \left( \frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} + \frac{R_u G_u}{L_u C_u} \right)}. \quad (46)$$

Si può verificare facilmente che, se vale la relazione  $R_u/L_u = G_u/C_u$  (ovvero, per ogni tratto,  $RC = GL$ : i circuiti associati  $RC$  e  $G^{-1}L$  hanno la stessa costante di tempo), possiamo riscrivere la (46) come

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\left( \frac{R_u}{L_u} + j\omega \right)^2} \quad (47)$$

$$= \sqrt{L_u C_u} \left( \frac{R_u}{L_u} + j\omega \right). \quad (48)$$

Abbiamo quindi che, sotto queste condizioni, la costante di attenuazione, parte reale di  $\gamma$ , non dipende dalla frequenza ( $\alpha = R_u \sqrt{C_u/L_u}$ ), mentre la parte immaginaria è pari a  $\beta = \omega/\sqrt{L_u C_u}$ , dalla quale segue  $v = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_u C_u}$ , riottenendo così la (44). La condizione

$$\frac{R_u}{L_u} = \frac{G_u}{C_u} \quad (49)$$

è detta quindi *di non distorsione* in quanto l'attenuazione al variare di  $x$  non dipende dalla frequenza e quindi un segnale di forma qualsiasi può essere attenuato, ma non distorto (si pensi alla decomposizione secondo l'analisi di Fourier di un segnale di forma qualsiasi). Inoltre, sotto questa condizione, la velocità di fase è la stessa che si avrebbe nel caso di linea non dissipativa.

#### 4.1.3 Soluzione stazionaria di $V$ nel limite di alte frequenze

Alcuni dei risultati ottenuti nel caso non dissipativo si riottengono nel limite di alte frequenze, ovvero quando, per  $\omega$  molto grande,  $R_u$  e  $G_u$  diventano trascurabili rispetto, rispettivamente, a  $\omega L_u$  e  $\omega C_u$ . Purtroppo, questo non è vero per l'attenuazione, in quanto aver imposto nel paragrafo 4.1.1  $R_u = G_u = 0$  dà esattamente  $\alpha = 0$ . Per riottenere  $\alpha$  e  $\beta$  che tengano conto, seppur in modo approssimato delle resistenze, valutiamo la costante di propagazione  $\gamma$  per  $R_u \ll \omega L_u$ , mantenendo uguale a zero  $G_u$  che effettivamente è trascurabile in molte applicazioni:

$$\gamma \approx \sqrt{j \omega C_u (R_u + j \omega L_u)} \quad (50)$$

$$= \sqrt{-\omega^2 L_u C_u \left(1 + \frac{R_u}{j \omega L_u}\right)} \quad (51)$$

$$= \sqrt{-\omega^2 L_u C_u \left(1 - j \frac{R_u}{\omega L_u}\right)} \quad (52)$$

$$\approx j \omega \sqrt{L_u C_u} \left(1 - j \frac{R_u}{2 \omega L_u}\right) \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{R_u}{\sqrt{L_u/C_u}} + j \omega \sqrt{L_u C_u}, \quad (54)$$

da cui

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{R_u}{\sqrt{L_u/C_u}} \quad (55)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u}. \quad (56)$$

Si riottiene  $v(= \omega/\beta) = 1/\sqrt{L_u C_u}$  e una costante di attenuazione dipendente linearmente da  $R_u$ . Anticipando un risultato che incontreremo nel prossimo paragrafo, riscriviamo  $\alpha$  come

$$\alpha = \frac{R_u}{2 R_0}, \quad (57)$$

ove  $R_0 = \sqrt{L_u/C_u}$  è una grandezza avente le dimensioni di un'impedenza (si ricordi che  $\alpha$  ha dimensioni inverse alla lunghezza e che  $R_u$  è una resistenza per unità di lunghezza) il cui significato sarà chiaro nel seguito.

Il caso di alte frequenze è particolarmente importante per le applicazioni di laboratorio nella trattazione di ‘segnali veloci’, come quelli analogici che vengono da rivelatori. Anche nell’esperienza di laboratorio sulla linea si utilizzeranno segnali di durata di qualche  $\mu s$  o meno, i quali coinvolgono, mediante l’analisi di Fourier, frequenze oltre il centinaio di kHz.

## 4.2 Onda di corrente e relazione con l’onda di tensione

Dall’equazione ‘dei telegrafisti’ per la corrente [Eq. (32)], seguono analoghi ragionamenti e soluzioni per  $\vec{I}(x)$  e quindi  $I(x, t)$ . Ma essendo  $\vec{V}(x)$  e  $\vec{I}(x)$  accoppiate dalle (27) e (28), esse non sono indipendenti. Otteniamo infatti dalla (27)

$$\vec{I}(x) = -\frac{1}{\vec{Z}_u} \frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial x} \quad (58)$$

$$= \frac{\gamma}{\vec{Z}_u} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{\gamma x}] \quad (59)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\vec{Z}_u/\vec{Y}_u}} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{\gamma x}]. \quad (60)$$

Il denominatore della (60) ha le dimensioni di un’impedenza (come deve essere in quanto rapporto fra tensione e corrente). Indichiamola con  $\vec{Z}_0$ , per ricordare che, in generale, è un numero complesso (modulo  $Z_0$  e fase  $\psi$ ):

$$\vec{Z}_0 = Z_0 e^{j\psi} = \sqrt{\frac{\vec{Z}_u}{\vec{Y}_u}} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L}{G_u + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L_u}{C_u} \frac{(R_u/L_u + j\omega)}{(G_u/C_u + j\omega)}}. \quad (61)$$

Otteniamo finalmente l’espressione della corrente in funzione della posizione e del tempo:

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_0 e^{j\psi}} A_1 e^{j\phi_1} e^{(-\alpha - j\beta)x} e^{j\omega t} - \frac{1}{Z_0 e^{j\psi}} A_2 e^{j\phi_2} e^{+(\alpha - j\beta)x} e^{j\omega t} \right\} \\ &= \frac{A_1}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1 - \psi) - \frac{A_2}{Z_0} e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2 - \psi). \end{aligned} \quad (62)$$

In entrambe le onde il rapporto fra tensione e corrente vale  $Z_0$ , indipendentemente da posizione e tempo. Inoltre, una eventuale componente reattiva di  $\vec{Z}_0$  provoca uno sfasamento di  $-\psi$ . Si noti che  $\psi$  può essere sia positivo che negativo, dipendendo dalla frequenza e dai valori delle costanti distribuite:

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\omega (G_u L_u - R_u C_u)}{R_u G_u + \omega^2 L_u C_u}. \quad (63)$$

Un caso interessante è quando la  $\psi$  si annulla, ovvero  $\vec{Z}_0$  è soltanto reale. Il caso banale per il quale la condizione è verificata è quando la linea non è dissipativa o di alte frequenze, ovvero  $R_u = G_u = 0$ , ovvero queste costanti della linea sono trascurabili, rispettivamente, rispetto a  $\omega L_u$  e  $\omega C_u$  [si vede bene dalla (61)]. L’altro

caso è quello di non distorsione ( $G_u L_u = R_u C_u$ ). In entrambi i casi otteniamo che  $Z_0$  si riduce a

$$Z_0 \rightarrow R_0 = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}. \quad (64)$$

In particolare, nel caso *non dissipativo*, l'onda di corrente si riduce a

$$I(x, t) = \frac{A_1}{R_0} \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi_1] - \frac{A_2}{R_0} \cos[\omega(t + \frac{x}{v}) + \phi_2]. \quad (65)$$

### 4.3 Rapporto tensione su corrente e impedenza caratteristica

Abbiamo visto nel caso stazionario sinusoidale *per ciascuna onda* il rapporto fra tensione e corrente dipende solo dalle caratteristiche della linea ed è indipendente da posizione e tempo. Il rapporto è in generale una impedenza complessa [vedi (60) e (62)], la quale si riduce a un termine puramente resistivo ( $R_0$ ) per linee non dissipative, di alte frequenze o non distorcenti. È *come se* ciascuna onda, mentre si propaga, 'vedesse' fra punti dei conduttori alla stessa posizione  $x$  esattamente tale impedenza, anche se essa non corrisponde affatto a  $1/\vec{Y}$  di ciascun tratto  $dx$ . In particolare, nelle condizioni speciali suddette, è come se l'onda 'vedesse' una resistenza  $R_0$ . Per il seguito di questo paragrafo, mettiamoci in questa condizione, senza che quanto vedremo perda di generalità.

Se la relazione fra tensione e corrente per ciascuna onda vale punto per punto, essa vale anche per  $x = 0$  per la sola onda progressiva. Consideriamo il caso limite di linea 'infinita,' ovvero lunghezza tale per cui il tempo di percorrenza è molto maggiore del periodo dell'onda e il tempo di osservazione dall'accensione del generatore è minore del tempo di percorrenza.<sup>1</sup> Quindi all'ingresso della linea il segnale 'vede' una resistenza  $R_0$ . Si ha quindi una partizione del segnale fra  $R_0$  e  $R_G$  del generatore, ovvero

$$V_{in} = \frac{V_G R_0}{R_G + R_0}, \quad (66)$$

esattamente come se, al posto della linea ci fosse una resistenza. La cosa interessante è che il rapporto tensione/corrente all'ingresso è misurabile (indipendentemente da come sia fatta la linea e quanto sia lunga) e esso fornisce istante per istante l'impedenza d'ingresso della linea. Nella condizione suddetta di linea infinita con solo onda progressiva, tale rapporto fornisce esattamente  $R_0$  (dal punto di vista pratico è più agevole misurare il rapporto di partizione  $V_{in}/V_G$ , dal quale risalire a  $R_0$ ).

Se invece, oltre all'onda progressiva, abbiamo in  $x = 0$  anche l'onda regressiva (ad esempio prodotta da una riflessione causata da una discontinuità nel processo di propagazione), l'impedenza all'ingresso misurata come  $V(x = 0, t)/I(x = 0, t)$  differisce da  $R_0$ . Consideriamo, ad esempio il caso di  $A_1 = A_2$ , assenza di dissipazione e fasi tali che per  $x = 0$  entrambe le onde hanno il massimo. Si ottiene allora

$$V(x = 0, t) = 2 A \cos[\omega t] \quad (67)$$

---

<sup>1</sup>Note: 1) in realtà del suo doppio, ma per ora non entriamo nei dettagli; 2) per essere precisi e consistenti con la trattazione fatta finora, che assumeva regime sinusoidale, occorrerebbe che le osservazioni partano dopo alcune oscillazioni, per dare modo alla linea di mettersi a regime (ma vedremo successivamente come questo non è necessario); 3) vedremo nel seguito che la condizione di linea infinita è soddisfatta se si 'termina' opportunamente la linea.

$$I(x = 0, t) = 0 \quad (68)$$

$$\frac{V(x = 0, t)}{I(x = 0, t)} \rightarrow \infty. \quad (69)$$

In questo caso, l'impedenza di ingresso è  $\infty$ . Ovvero non c'è partizione all'ingresso, nel senso che l'onda regressiva compensa esattamente l'effetto di partizione che si avrebbe avuto nel caso di sola onda progressiva.

Rivedremo in dettaglio queste considerazioni nel paragrafo 6. Per ora terminiamo con un commento sul segno meno che compare nella (59) e formule derivate. Esso è semplicemente dovuto al fatto che nelle correnti bisogna considerare il verso di scorrimento delle cariche.<sup>2</sup>

## 5 Parametri di alcune linee tipiche

Per fissare gli ordini di grandezza, vediamo come  $v$  e  $R_0$  dipendono dal tipo di linea.

**Cavo coassiale** : in funzione del diametro interno  $d$  e del diametro esterno  $D$  abbiamo

$$C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{D}{d}} \quad (70)$$

$$L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad (71)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}, \quad (72)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{D}{d} \quad (73)$$

ove  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto,  $\epsilon_r$  è la costante elettrica relativa del dielettrico e  $c$  la velocità della luce nel vuoto (30 cm/ns è un valore comodo per lavorare con linee di trasmissione di lunghezze dai metri ai centinaia di metri). La velocità di trasmissione dipende sostanzialmente solo da  $1/\sqrt{\epsilon_r}$ , ove  $\epsilon_r$  è dell'ordine di 2 unità per cavi commerciali, ovvero  $v \approx 0.7c$ .  $R_0$  dipende invece anche dalla geometria, ma in modo logaritmico. Valori tipici per un cavo coassiale sono  $C_u \approx 0.1 - 1$  pF/m,  $L_u \approx 1 - 10$  nH/m, ovvero  $R_0 \approx 50 - 200 \Omega$  (ad esempio i cavi delle antenne televisive sono da  $75 \Omega$ , quelli dei cavi BNC da laboratorio  $50 \Omega$ ). In particolare, il cavo di laboratorio RG 58 C/U ha le seguenti caratteristiche:

$$C_u = 100 \text{ pF/m } [30 \text{ pF/ft}] \quad (74)$$

$$R_0 = 50 \Omega \quad (75)$$

$$v = 20 \text{ cm/ns} \quad (76)$$

$$\tau_0 = 5 \text{ ns/m} \quad (77)$$

---

<sup>2</sup>Nella teoria si ha la consuetudine di trattare la corrente come un semplice scalare, considerando al più il verso e dimenticando che il fenomeno fisico di conduzione è legato all'*intensità di corrente*  $\vec{J}$  che è un normale vettore (e non un artificio del calcolo simbolico...), con direzione e verso. Considerando quindi una sezione di conduttore, è più che naturale che intensità di corrente aventi verso opposto vadano sottratte (in modulo).

**Linea bifilare** : per confronto riportiamo anche le formule per calcolare  $C_u$  e  $L_u$  per linee bifilari, ovvero costituite da due fili paralleli.

$$C_u = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{2D}{d}} \quad (78)$$

$$L_u = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{2D}{d}, \quad (79)$$

ove  $d$  e  $D$  sono, rispettivamente, diametro dei fili e distanza fra i loro centri. Di nuovo si vede l'interessante risultato della velocità di propagazione dipendente solo da  $\epsilon_r$ .

## 6 Linea non dissipativa (caso generale)

Il caso sinusoidale ci ha permesso di vedere diversi aspetti interessanti della linea di ritardo, compresa la dipendenza dalla distanza dell'attenuazione. Tale trattazione è comunque vincolata dal considerare grandezze 'a regime'. Vediamo ora il caso più generale (dal punto di vista temporale del temporale e che è valido 'istantaneamente', ovvero senza attendere che la linea si metta a regime). Dovremo però rinunciare a trattare gli effetti dissipativi, che possiamo pensare di trattare fenomenologicamente da quanto appreso nel caso sinusoidale.

Nel caso in cui la resistività dei conduttori è nulla e la resistenza fra di essi è infinita (ovvero  $R = G = 0$ ) le equazioni differenziali (19) e (20) si riducono a

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}, \quad (80)$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C_u \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}. \quad (81)$$

Derivando la (80) rispetto a  $x$  e la (81) rispetto a  $t$  si ottiene

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = -L_u \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t}, \quad (82)$$

$$\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} = -C_u \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2}, \quad (83)$$

dalle quali segue

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - L_u C_u \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (84)$$

Si riconosce l'equazione delle onde (di D'Alambert) con velocità di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}. \quad (85)$$

La soluzione generale per  $V(x, t)$  ha la forma

$$V(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (86)$$

ove  $f_1$  rappresenta l'onda *progressiva* e  $f_2$  l'onda *regressiva* (in  $f_1$  la condizione di fase costante si ottiene per  $x - vt = cost$ , ovvero  $x = vt + cost$ ; in  $f_2$  tale condizione si ottiene  $x + vt = cost$ , ovvero  $x = -vt + cost$ ).

Derivando la (80) rispetto a  $t$  e la (81) rispetto a  $x$  si ottiene una analoga equazione di D'Alambert per  $I(x, t)$ , avente soluzione generale della forma

$$I(x, t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt). \quad (87)$$

Le soluzioni  $V(x, t)$  e  $I(x, t)$  devono rispettare le condizioni sulle derivate parziali date dalle (80) e (81). Come già visto nel caso sinusoidale, queste condizioni sono soddisfatte se la soluzione per la corrente assume la forma

$$I(x, t) = \frac{1}{R_0} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)], \quad (88)$$

con  $R_0 = \sqrt{L/C}$ . Del significato di  $R_0$  abbiamo già parlato precedentemente. Anche per il segno relativo fra le due componenti di  $I(x, t)$  vale quanto detto al termine del paragrafo 4.3

## 7 Risposta della linea di trasmissione a segnali impulsati unipolari

Le equazioni generali per linee non dissipative ci confortano sul fatto che la propagazione ad onde non è strettamente legata ad onde sinusoidali e quindi, almeno in principio, possiamo considerare segnali di qualsiasi forma. Nel seguito ci concentriamo sullo studio del comportamento della linea di ritardo a segnali impulsati di durata dell'ordine di grandezza del tempo di propagazione lungo la linea ( $0.5 \mu\text{s}$  per una linea da 100 m) che, come vedremo, sono particolarmente semplici e istruttivi. Una delle ragioni di semplicità è che, in molti ragionamenti, potremo trattare tali segnali come delle tensioni costanti per un certo intervallo di tempo di interesse. Inoltre, essendo coinvolte sono 'alte' frequenze, anche l'attenuazione può essere introdotta, facendo uso dei risultati ottenuti nell'approssimazione per alte frequenze. Riassumiamo i parametri di cui faremo uso:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \quad (89)$$

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} \quad (90)$$

$$\alpha = \frac{R_u}{2 R_0} \quad (91)$$

### 7.1 Partizione d'ingresso e onda progressiva

Ad esempio, immaginiamo di accendere il generatore ad una tensione  $Vg$  costante per un tempo superiore al doppio del tempo di transito nella linea.

#### 7.1.1 Ingresso per $t = 0$ e $0 < t < 2t_l$

Negli istanti immediatamente successivi a  $t = 0$  è presente all'ingresso della linea solo l'onda che proviene dal generatore. Essa 'vede' una impedenza di ingresso  $R_0$  e

perciò il segnale osservato in ingresso è dato dal partitore

$$V(x = 0, t = 0) = V_{in} = \frac{R_0}{R_G + R_0} V_G \quad (92)$$

$$I(x = 0, t = 0) = I_{in} = \frac{1}{R_G + R_0} V_G. \quad (93)$$

Tipicamente la resistenza interna del generatore è  $\approx R_0$  (per il motivo che vedremo) e quindi il segnale all'ingresso della linea si dimezza rispetto a quello che si osserva senza connettere la linea. Negli istanti successivi si seguita ad osservare la stessa tensione. Va da sé che non può succedere nient'altro finché non ritorna una qualche onda riflessa dall'altro capo della linea. Ma quest'onda può partire dall'altra estremità solo a  $t = t_l = l/v$ , ove  $l$  è pari alla lunghezza della linea. Ovvero gli effetti dell'onda riflessa si presentano all'ingresso solo dopo  $2t_l$ ,

Riassumendo, per  $0 < t < 2t_l$ :

- $V(x = 0, t) = V_{in} = \frac{R_0}{R_G + R_0} V_G$
- $I(x = 0, t) = I_{in} = \frac{1}{R_G + R_0} V_G.$

### 7.1.2 $0 < x < l$ per $0 < t < t_l$

Tensione e corrente presenti all'ingresso si propagano fino all'altro capo

## 7.2 Segnale all'altra estremità della linea

Dopo al tempo  $t = t_l$  il segnale arriva all'altra estremità della linea di trasmissione. Chiamiamo  $V_{out}$  la sua ampiezza. Essa è pari a  $V_{in}$  moltiplicata per l'attenuazione. Anche l'intensità di corrente si sarà attenuata dello stesso fattore, in quanto lungo la propagazione della sola onda incidente è rispettata la condizione  $V/I = R_0$ . Abbiamo quindi:

$$V_{out} = V_{in} e^{-\alpha l} \quad (94)$$

$$I_{out} = I_{in} e^{-\alpha l} = \frac{V_{out}}{R_0}. \quad (95)$$

A questo punto possono succedere diverse cose interessanti, a secondo della resistenza posta al termine della linea (si noti che in genere si tratta di una impedenza che può avere anche una componente reattiva, tipicamente capacitiva).

### 7.2.1 Linea adattata

Se la linea è terminata con  $R_c = R_0$ , quando il segnale arriva in fondo trova la stessa condizione  $V(x, t)/I(x, t) = R_0$  rispettata e ... non succede niente. Solo che questa volta la resistenza è 'reale' e assorbe esattamente quella corrente a quella differenza di potenziale. Dal punto di vista di un osservatore all'ingresso, la linea si comporta come se fosse infinita (nel senso che non arriva nessuna 'informazione' dall'altro capo).



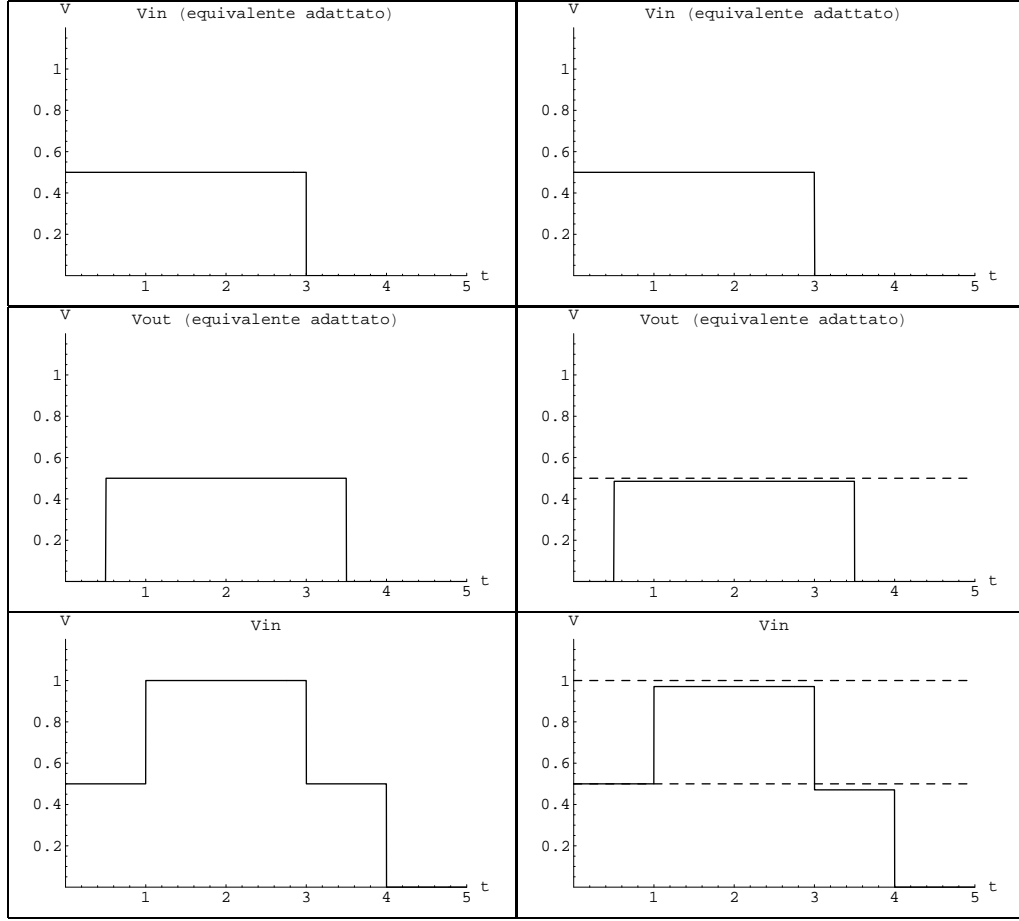


Figura 7: Comportamento della linea di trasmissione adattata e disadattata (aperta all'uscita) per segnali ad onda quadra unipolari di lunghezza superiore al tempo di percorrenza andata-ritorno. Dall'alto in basso: segnale in ingresso in caso di linea adattata; segnale in uscita in caso di linea adattata; segnale in ingresso dovuto alla somma del segnale incidente e riflesso. I diagrammi a destra tengono conto delle attenuazioni. La scala temporale è in  $\mu\text{s}$ .

### 7.2.2 Linea aperta

Supponiamo invece che la linea sia aperta all'estremo  $x = l$ . Questo implica che la corrente è nulla, ovvero  $I(x = l, t = t_l) = 0$ . Questo comportamento è schematizzabile dal punto di vista formale, come la sovrapposizione dell'onda incidente più un'onda riflessa, di fasi tali che le correnti si annullano:

$$I(x = l, t = t_l) = I_{out} + I_{rifl} = 0 = \frac{V_{out}}{R_0} - \frac{V_{rifl}}{R_0} \quad (96)$$

ovvero

$$I_{rifl} = -I_{out} \quad (97)$$

$$V_{rifl} = V_{out}, \quad (98)$$

da cui

$$V(x = l, t = t_l) = V_{out} + V_{rifl} = 2V_{out} = 2V_{in} e^{-\alpha l}. \quad (99)$$

Ovvero, all'istante  $t = t_l$  si forma un'onda riflessa della stessa polarità e ampiezza di quella incidente. Quest'onda comincia a viaggiare nel verso opposto a quello incidente e al tempo  $t = 2t_l$  essa si presenterà all'ingresso. A mano a mano che l'onda riflessa si avvicina all'ingresso la tensione sale a praticamente  $2V_{out}$ , a parte una piccola differenza dovuta all'attenuazione. Più precisamente

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha x} + V_{out} e^{-\alpha(l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] & t_l \leq t \leq 2t_l, \\ &= V_{in} e^{-\alpha x} + V_{in} e^{-\alpha l} e^{-\alpha(l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] & t_l \leq t \leq 2t_l, \\ &= V_{in} \left[ e^{-\alpha l} + e^{-\alpha(2l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] \right] & t_l \leq t \leq 2t_l, \end{aligned} \quad (100)$$

ove la  $\theta[\cdot]$  indica la funzione a gradino unitaria, che vale 1 se l'argomento è positivo e 0 altrimenti.

### 7.2.3 Linea cortocircuitata

Se, invece, la linea è cortocircuitata è nulla la tensione. Di nuovo, questo risultato può essere descritto come somma di due onde di tensione, questa volta però di segno opposto:

$$V(x = l, t = t_l) = V_{out} + V_{rifl} = 0 \quad (101)$$

$$V_{rifl} = -V_{out}, \quad (102)$$

da cui segue una corrente complessiva di:

$$I(x = l, t = t_l) = \frac{1}{R_0} [V_{out} - V_{rifl}] = \frac{2V_{out}}{R_0} = 2I_{out}, \quad (103)$$

Per meglio comprendere il significato di questa corrente, immaginiamo di trascurare l'attenuazione della linea:  $I_{out} = I_{in} = V_G/(R_0 + R_G) = V_G/(2R_G)$  (ricordiamo che  $R_0 = R = G$ ). La corrente totale  $2I_{out}$  rappresenta esattamente  $G_G/R_G$ , ovvero la corrente di corto circuito del generatore. Quindi il risultato sembra banale. La cosa interessante è che questa condizione di corrente si verifica dopo il tempo di transito nella linea.

Di nuovo, l'onda riflessa si propaga all'indietro e, a mano a mano che viaggia, annulla quasi completamente la tensione lungo la linea (a parte un piccolo residuo dovuto all'attenuazione). Tenendo conto dell'attenuazione, otteniamo tensioni totali simili alle (100):, a parte il segno meno:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha x} - V_{out} e^{-\alpha(l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] & t_l \leq t \leq 2t_l, \\ &= V_{in} e^{-\alpha x} - V_{in} e^{-\alpha l} e^{-\alpha(l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] & t_l \leq t \leq 2t_l, \\ &= V_{in} \left[ e^{-\alpha l} - e^{-\alpha(2l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] \right] & t_l \leq t \leq 2t_l, \end{aligned} \quad (104)$$

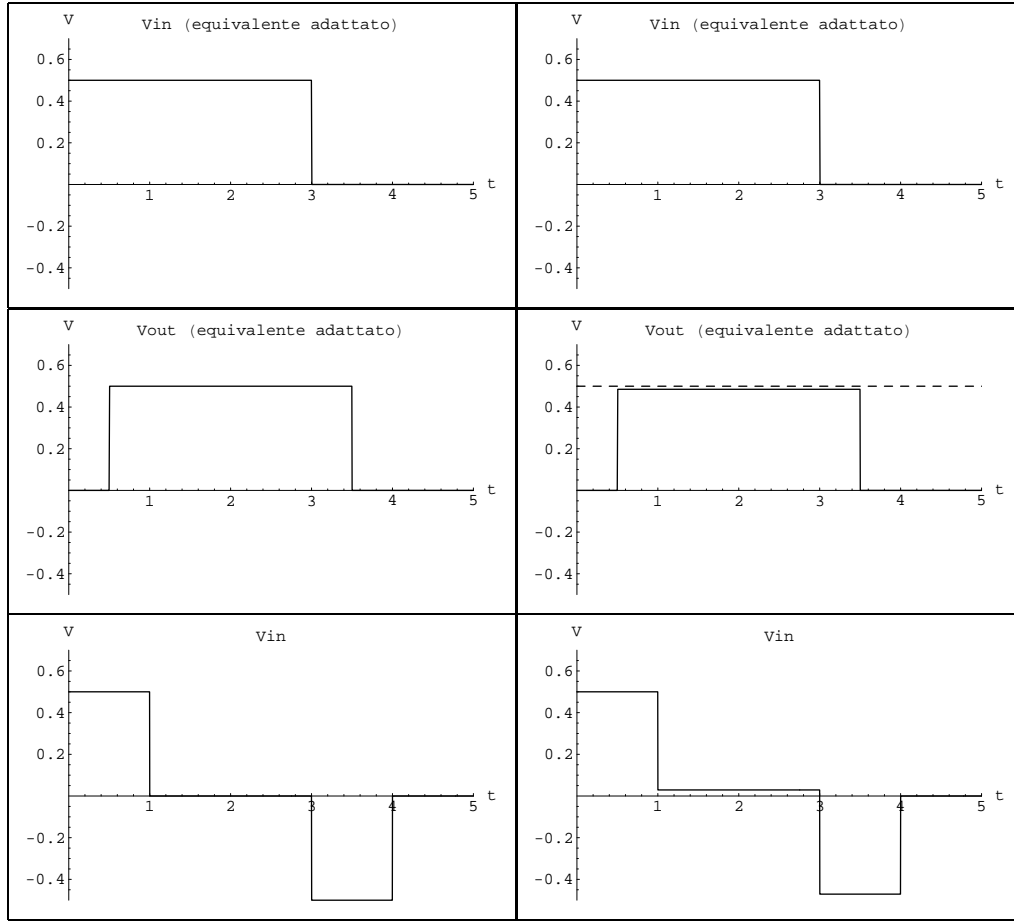


Figura 8: Comportamento della linea di trasmissione adattata e disadattata (cortocircuitata all'uscita) per segnali ad onda quadra unipolari di lunghezza superiore al tempo di percorrenza andata-ritorno. Dall'alto in basso: segnale in ingresso in caso di linea adattata; segnale in uscita in caso di linea adattata; segnale in ingresso dovuto alla somma del segnale incidente e riflesso. I diagrammi a destra tengono conto delle attenuazioni. La scala temporale è in  $\mu s$ .

#### 7.2.4 Caso generale: coefficiente di riflessione

Il caso generale, dipendente dalla resistenza di carico  $R_c$  all'uscita, è descritto da un *coefficiente di riflessione* il quale può essere ottenuto con il seguente ragionamento. Ai capi di  $R_c$  deve valere necessariamente la legge di Ohm:

$$\frac{V(x=l, t=t_l)}{I(x=l, t=t_l)} = R_c. \quad (105)$$

Scrivendo tensione e corrente in termine dell'onde incidente e riflessa abbiamo

$$\frac{V_{out} + \Gamma V_{out}}{\frac{V_{out} - \Gamma V_{out}}{R_0}} = R_c \quad (106)$$

$$\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{R_c}{R_0}, \quad (107)$$

da cui otteniamo l'espressione per il *coefficiente di riflessione*

$$\Gamma = \frac{R_c - R_0}{R_c + R_0} \quad (108)$$

il quale effettivamente riproduce i casi limite analizzati precedentemente.

$$R_c = R_0 \rightarrow \Gamma = 0 \quad (109)$$

$$R_c = \infty \rightarrow \Gamma = 1 \quad (110)$$

$$R_c = 0 \rightarrow \Gamma = -1. \quad (111)$$

Riscriviamo ancora una volta le espressioni della tensione nella linea nell'intervallo  $t_l \leq t \leq 2t_l$ , questa volta in funzione di  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha x} + \Gamma V_{out} e^{-\alpha(l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] & t_l \leq t \leq 2t_l, \\ &= V_{in} e^{-\alpha x} + \Gamma V_{in} e^{-\alpha l} e^{-\alpha(l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] & t_l \leq t \leq 2t_l, \\ &= V_{in} \left[ e^{-\alpha l} + \Gamma e^{-\alpha(2l-x)} \theta[(t - t_l) - (l - x)/v] \right] & t_l \leq t \leq 2t_l, \end{aligned} \quad (112)$$

### 7.3 Segnale in ingresso all'arrivo dell'eventuale onda riflessa

Dopo il tempo  $2t_l$ , il coefficiente di riflessione è diverso da 0 avremo in ingresso la somma delle due onde, come visto precedentemente. Usando la (112) abbiamo:

$$V(x = 0, t = 2t_l) = V_{in} \left[ 1 + \Gamma e^{-2\alpha l} \right]. \quad (113)$$

Nei due casi notevoli di circuito aperto e cortocircuitato abbiamo

$$\Gamma = 1 \rightarrow V(x = 0, t = 2t_l) = V_{in} \left[ 1 + e^{-2\alpha l} \right] \approx V_G [1 - \alpha l] \quad (114)$$

$$\Gamma = -1 \rightarrow V(x = 0, t = 2t_l) = V_{in} \left[ 1 - e^{-2\alpha l} \right] \approx V_G [\alpha l], \quad (115)$$

ove nelle ultime espressioni abbiamo fatto l'espansione dell'esponenziale al primo ordine ( $2\alpha l$  è abbastanza piccolo) per avere l'ordine di grandezza dell'effetto:

- nel caso di linea aperta, riotteniamo la tensione del generatore, a parte una piccola attenuazione;
- nel caso di linea chiusa, otteniamo un valore prossimo a zero, ma non esattamente zero per via dell'attenuazione;
- per completezza, ricordiamo che se  $R_c = R_0$ , non c'è nessuna riflessione e seguiranno a vedere sempre  $V_{in} = V_G/2$ .

### 7.4 Impedenza di ingresso della linea

A questo punto, essendo chiara la fenomenologia della propagazione delle onde e del ruolo delle riflessioni, è importante insistere sul fatto che non dobbiamo confondere l'*impedenza caratteristica della linea* (ovvero  $R_0$ , quella che vede ciascuna onda durante la propagazione) con l'*impedenza d'ingresso* della linea (ovvero il rapporto fra

tensione e corrente all'ingresso). Mentre l'impedenza caratteristica è una proprietà della linea, l'impedenza d'ingresso dipende dal tipo di segnali applicati e dal tempo. Nel semplice caso di impulso a gradino di durata superiore a  $2t_l$ , abbiamo visto come essa vale inizialmente  $R_0$ , per divenire, al ritorno dell'onda riflessa un valore compreso fra circa 0 e infinito.

Vediamo come essa varia in funzione del carico applicato, trascurando inizialmente le attenuazioni:

$$R_{in}(t = 2t_l) = \frac{V(x = 0, t = 2t_l)}{V(x = 0, t = 2t_l)} = \frac{V_{in} [1 + \Gamma]}{\frac{V_{in}}{R_0} [1 - \Gamma]} \quad (116)$$

$$= R_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (117)$$

$$= R_c. \quad (118)$$

In pratica, dopo un tempo pari a  $t = 2t_l$  l'impedenza d'ingresso diventa pari a quella di  $R_c$ : il sistema si accorge 'in ritardo' (il giusto ritardo) di cosa c'è all'altro capo del cavo.

Vediamo come l'attenuazione modifica l'impedenza di ingresso:

$$R_{in}(t = 2t_l) = \frac{V(x = 0, t = t_l)}{V(x = 0, t = t_l)} = \frac{V_{in} [1 + \Gamma e^{-2\alpha l}]}{\frac{V_{in}}{R_0} [1 - \Gamma e^{-2\alpha l}]} \quad (119)$$

$$= R_0 \frac{1 + \Gamma e^{-2\alpha l}}{1 - \Gamma e^{-2\alpha l}}, \quad (120)$$

che per i casi limite di  $\Gamma \pm 1$ , espandendo l'esponenziale al primo ordine, dà;

$$R_{in}(t = 2t_l, \Gamma = -1) = \frac{\alpha l}{1 - \alpha l} R_0 \quad (121)$$

$$R_{in}(t = 2t_l, \Gamma = +1) = \frac{1 - \alpha l}{\alpha l} R_0, \quad (122)$$

le quali tendono, rispettivamente, a zero e infinito solo per  $\alpha \rightarrow 0$ .

## 7.5 Disadattamento del generatore

A questo punto bisogna seguire l'onda riflessa, la quale si presenta all'ingresso del generatore e per la quale vale il discorso per quella del generatore sull'altra estremità della linea. Questo è il motivo per il quale i generatori di segnali hanno impedenze interne pari a quelle tipiche dei cavi usati in laboratorio. Altrimenti ci sarebbero riflessioni multiple.

## 7.6 Quando il segnale del generatore si esaurisce

Negli esempi precedenti abbiamo considerato segnali rettangolari molto più lunghi del tempo di percorrenza andata-ritorno lungo la linea, interessandoci principalmente a cosa succede immediatamente dopo l'arrivo dell'onda riflessa. Quello che succede quando il segnale del generatore è facile da intuire: per un tempo  $2t_l$  persiste il riflesso, il quale, in assenza del segnale del generatore, apparirà da solo. Un caso particolarmente interessante è quando la durata del segnale è minore di  $2t_l$ . In questo caso onde dirette e riflesse saranno ben separate, come ad esempio riportato in Fig. 9.

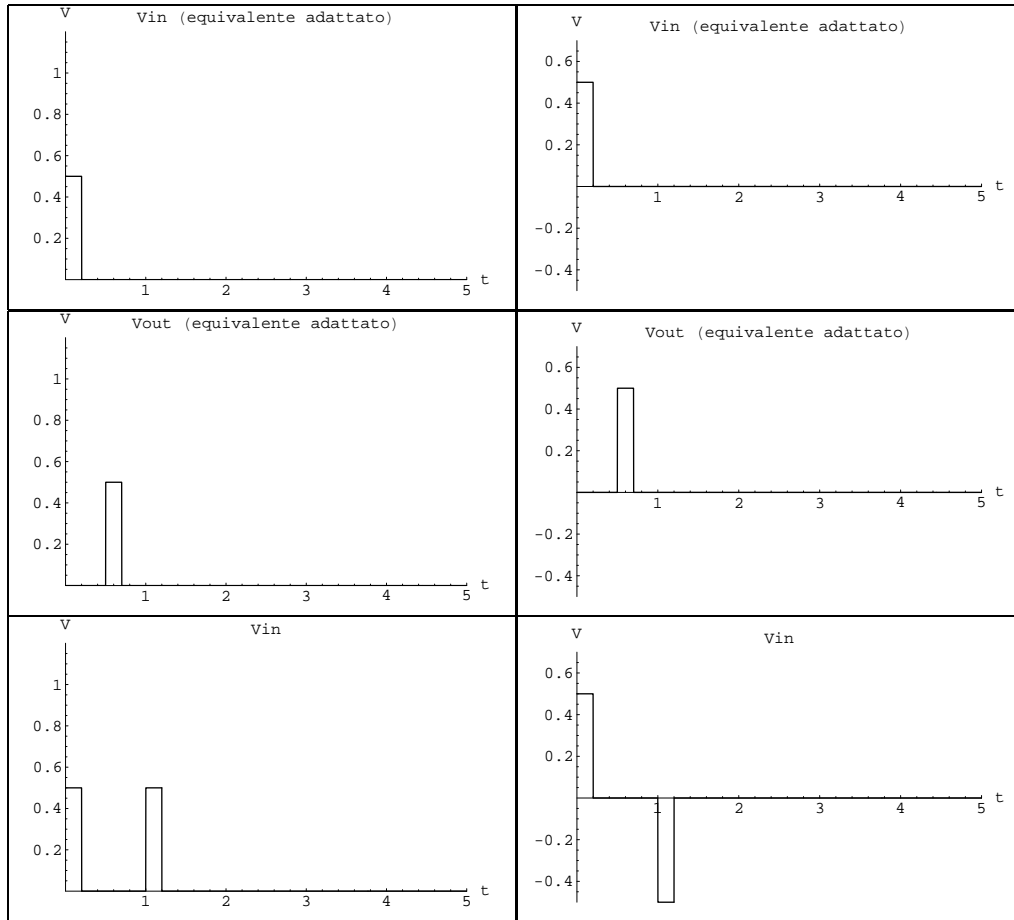


Figura 9: Comportamento della linea di trasmissione adattata e disadattata (a destra aperta all'uscita; a sinistra cortocircuitata all'uscita) per segnali ad onda quadra unipolari di lunghezza inferiore al tempo di percorrenza andata-ritorno. Dall'alto in basso: segnale in ingresso in caso di linea adattata; segnale in uscita in caso di linea adattata; segnale in ingresso dovuto alla somma del segnale incidente e riflesso. I diagrammi La scala temporale è in  $\mu s$ .

## 8 Segnali impulsati bipolari

Il caso di onde quadre con tensioni fra 0 e  $V_G$  (sia questa tensione positiva che negativa) è particolarmente semplice da trattare, soprattutto fra l'intervallo fra impulsi successivi è molto più grande del del tempo di percorrenza andata-ritorno della linea. Infatti, Ogni nuovo impulso trova essenzialmente la linea 'a riposo', non essendoci più 'memoria' delle riflessioni precedenti. Quindi, veramente si può considerare ogni nuovo impulso come se fosse il primo che esce dal generatore. Diverso è il caso di onde quadre bipolari, ovvero onde che variano fra  $-V_n$  e  $+V_p$ , con  $V_n$  e  $V_p$  positive. In genere la tensione oscilla in modo simmetrico fra  $\pm V_G$ .

Nel caso di impulsi bipolari con linea disadattata, alla partenza di ciascun fronte, c'è in ingresso il segnale riflesso del livello di segno opposto. Prendiamo quello che si vede all'ingresso in corrispondenza della partenza del livello positivo  $+V_G$ . Non

si vedrà  $V_{in}$  dovuto semplicemente alla partizione d'ingresso, essendo già presente il riflesso del livello negativo.

$$V(x = 0, t = 0) = V_{in}^{(+)} + \Gamma V_{in}^{(-)} e^{-2\alpha l} \quad (123)$$

$$= \frac{R_0}{R_G + R_0} V_G - \frac{R_0}{R_G + R_0} V_G \Gamma e^{-2\alpha l}. \quad (124)$$

Le figure 10 e 11 mostrano i segnali in ingresso, a parità di coefficiente di attenuazione e di impedenza di uscita per segnali, rispettivamente unipolari e bipolari. In entrambe le figure sono mostrate anche le onde di ingresso e di uscita che si avrebbero in caso di linea adattata ('equivalente adattato') e le sole onde riflesse (linee puntinate). Si noti che in alcuni tratti le linee continue ricoprono quelle puntinate. Queste ultime possono essere inferite tenendo conto che in tutti i casi i segnali cambiano segno ogni  $3\mu s$ . Ad esempio, nel caso di uscita cortocircuitata e aperta, linea adattata all'ingresso ( $R_G = R_0$ ) ed espandendo al prim'ordine la funzione di attenuazione, abbiamo:

$$V(x = 0, t = 0; R_c = 0) \approx \frac{V_G}{2} + \frac{V_G}{2} (1 - 2\alpha l) = V_G (1 - \alpha l) \quad (125)$$

$$V(x = 0, t = 0; R_c = \infty) \approx \frac{V_G}{2} - \frac{V_G}{2} (1 - 2\alpha l) = V_G \alpha l. \quad (126)$$

Nel primo caso si ottiene la tensione del generatore (a parte il piccolo effetto dovuto all'attenuazione), nel secondo si ottiene un valore nullo (attenuazione a parte). Dopo  $2t_l$  l'effetto della riflessione precedente termina. A questo punto rimane soltanto il segnale 'nuovo' e la sua riflessione, che esattamente a questo punto comincia ad arrivare:

$$V(x = 0, t = 2t_l) = V_{in}^{(+)} + \Gamma V_{in}^{(+)} e^{-2\alpha l} \quad (127)$$

$$= \frac{R_0}{R_G + R_0} V_G + \frac{R_0}{R_G + R_0} V_G \Gamma e^{-2\alpha l}. \quad (128)$$

Otteniamo quindi, sempre nei due casi limite di disadattamento.

$$V(x = 0, t = 2t_l; R_c = 0) \approx \frac{V_G}{2} - \frac{V_G}{2} (1 - 2\alpha l) = V_G (1 - \alpha l). \quad (129)$$

$$V(x = 0, t = 2t_l; R_c = \infty) \approx \frac{V_G}{2} + \frac{V_G}{2} (1 - 2\alpha l) = V_G (1 - \alpha l). \quad (130)$$

ovvero

$$V(x = 0, t = 0; R_c = 0) = V(x = 0, t = 2t_l; R_c = \infty) \quad (131)$$

$$V(x = 0, t = 0; R_c = \infty) = V(x = 0, t = 2t_l; R_c = 0), \quad (132)$$

come si vede chiaramente dalla Fig. 11.

## 9 Guida all'esperienza

Questa esperienza è particolarmente interessante sia per gli aspetti 'esplorativi' che di misure di grandezze. Tutte le misure andranno fatte con 'onde quadre'. A parità

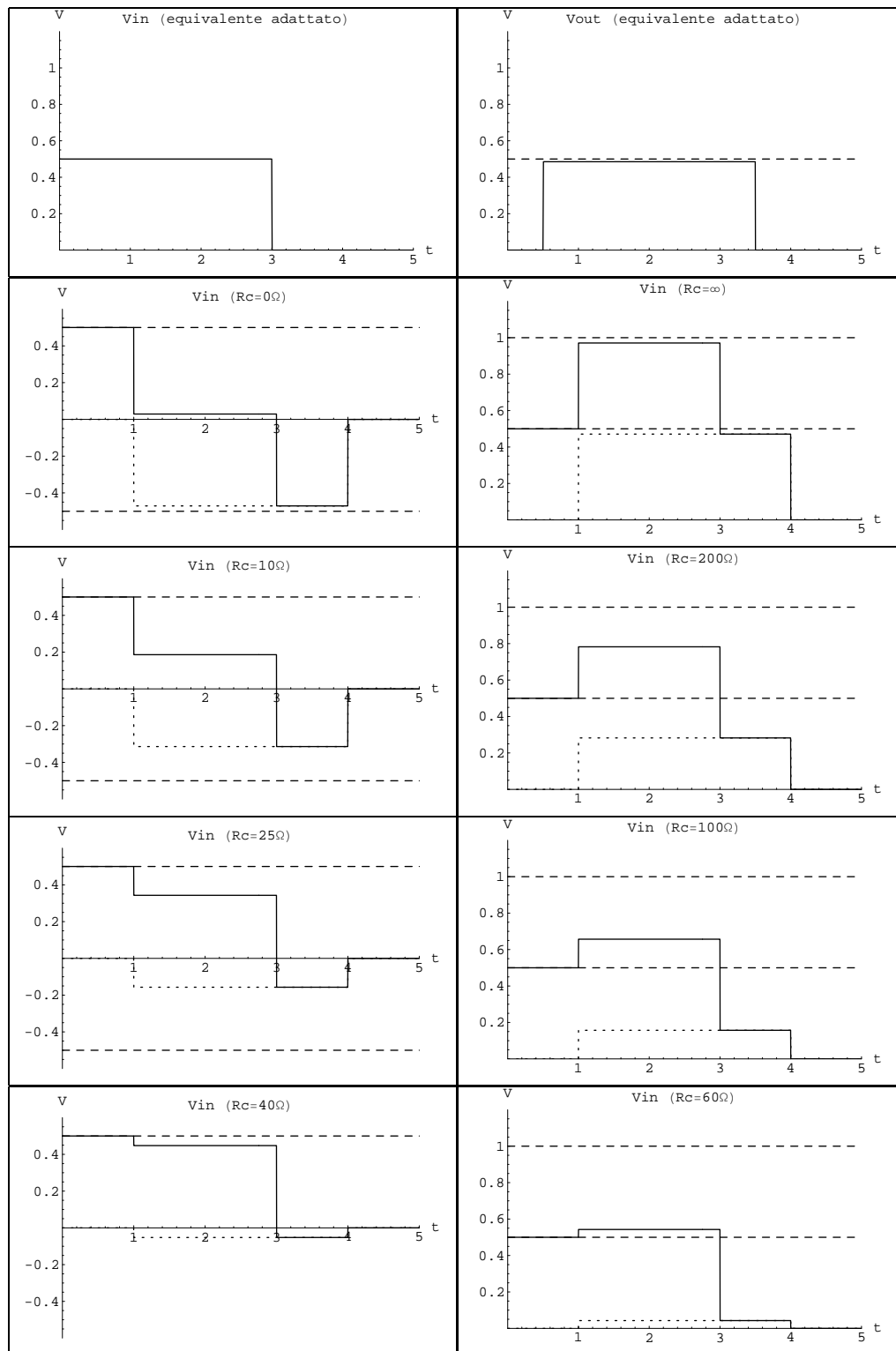


Figura 10: Onda quadra **unipolare** di  $3 \mu s$ . Segnali in ingresso e in uscita 'equivalenti adattati' (vedi testo) confrontati co i segnali in ingresso dovuti alla somma dell'onda incidente e riflessa. I soli contributi di quest'ultima sono mostrati dalle linee puntinate. La scala temporale è in  $\mu s$ .



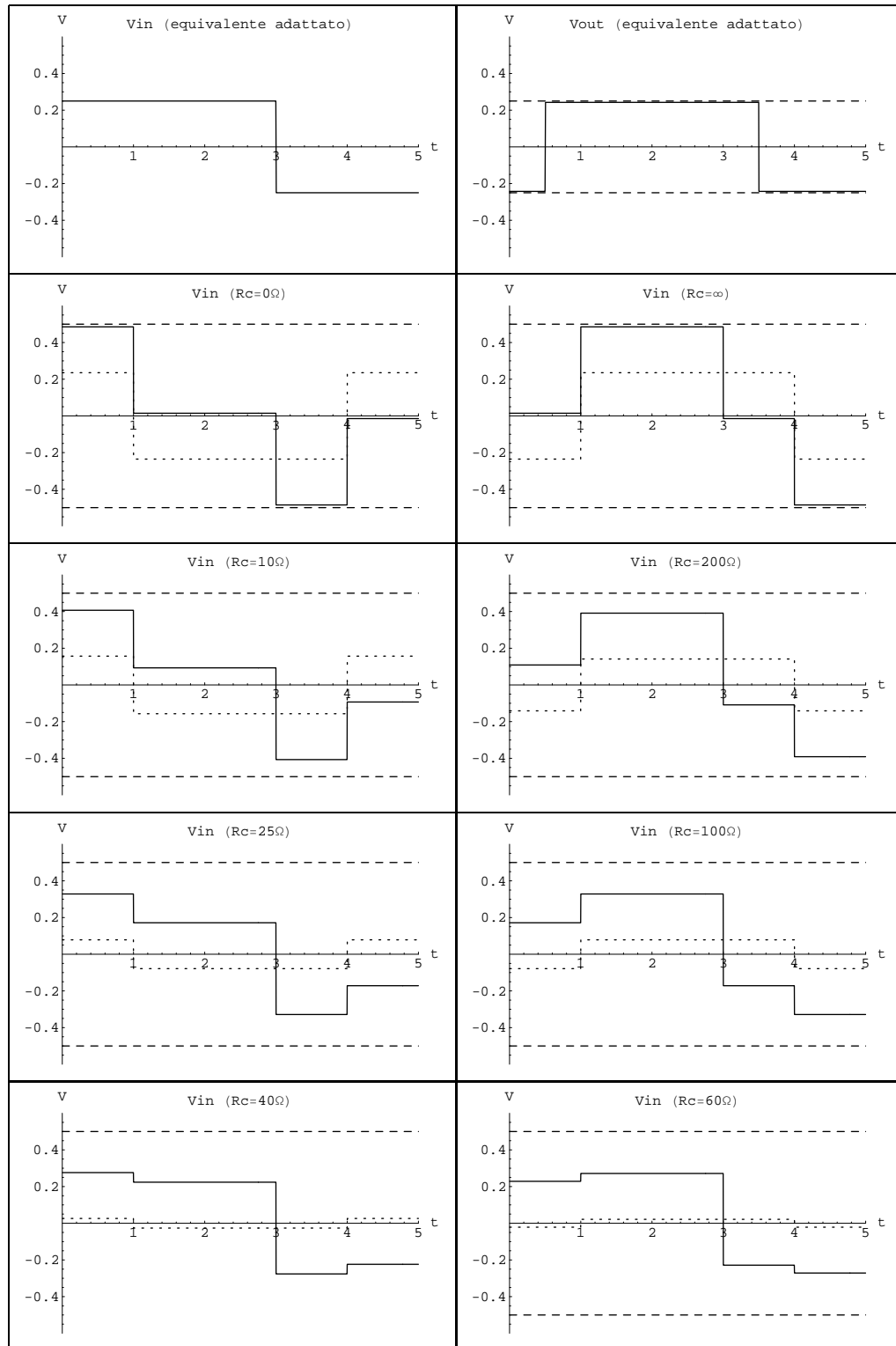


Figura 11: Come Fig 10, ma per onda quadra **bipolare**.

di frequenza dell'onda, è possibile variare la durata dei due stati dell'onda quadra mediante la funzione *duty cycle*. Si raccomanda, almeno inizialmente, di usare ondequadre unipolari, ovvero di fissare a zero uno dei livelli dell'onda. Questo si può ottenere agendo sull'*offset*. Di conseguenza, la lettura sull'oscilloscopio deve essere effettuata in DC. Successivamente si possono usare anche onde quadre bipolari, per meglio capire quello che sta succedendo.

## 9.1 Onda quadra unipolare

**Osservazione della partenza e dell'arrivo dell'onda** Inviare il segnale del generatore al CH1 dell'oscilloscopio e, mediante una T, farlo proseguire alla linea di ritardo (cavo da 100 m). Inviare l'uscita del cavo al CH2 dell'oscilloscopio. Adattare l'ingresso del CH2 (ovvero **adattare l'uscita della linea**) usando una T e un 'tappo' da  $50 \Omega$ . Osservando le due onde si osserverà un ritardo fra le onde di circa  $0.5 \mu s$ . → misura di  $R_0$ ,  $v$  e  $\alpha$

- $R_0$  può essere ottenuto dalla partizione del segnale in ingresso, assumendo  $R_G = 50 \Omega$ . Più precisamente, si misura il rapporto  $R_0/R_G$  ottenuto come

$$\frac{R_0}{R_G} = \frac{V_{in}}{V_G - V_{in}}, \quad (133)$$

ove  $V_G$  indica la tensione prima di connettere la linea e  $V_{in}$  la tensione osservata dopo aver connesso la linea.

- La velocità di propagazione è semplicemente data dalla lunghezza del cavo (da CH1 a CH2, tenendo conto di eventuali raccordi) diviso il ritardo fra i due fronti d'onda.
- L'attenuazione può essere misurata dal confronto delle ampiezze dei segnali in partenza e all'arrivo, in quanto

$$\frac{V_{out}}{R_{in}} = e^{-\alpha l}. \quad (134)$$

Per questa misura si faccia particolare attenzione alla calibrazione relativa dei due canali dell'oscilloscopio e alle posizioni verticali delle tracce. Eventualmente, è raccomandabile di effettuare le misure con lo stesso canale.

**Disadattamento dell'uscita** Successivamente, sarà sufficiente togliere il tappo da  $50 \Omega$  dalla T di CH2 per osservare le riflessioni all'ingresso. Per avere resistenze di carico ( $R_c$ ) variabili, si può connettere alla T di CH2 il cavo 'bastardo' (BNC-Cocodrilli). Si noti come mantenere l'uscita su CH2 non perturba le misure, in quanto l'oscilloscopio ha una impedenza di ingresso elevata. Inoltre è interessante osservare cosa succede all'uscita per i diversi carichi per meglio capire le condizioni su tensione e corrente discusse precedentemente.

**Misure con 'onde lunghe'** Usando onde di durata maggiore di  $2 t_l$  osservare le varie fenomenologie descritte precedentemente. Usare le informazioni per misurare nuovamente velocità e attenuazione.

- La velocità di propagazione data dal doppio della lunghezza del cavo (da CH1 alla fine del cavo, compreso eventualmente il ‘cavo bastardo’) diviso il ritardo fra la partenza del segnale e l’arrivo dell’onda riflessa all’ingresso.
- L’attenuazione può essere ottenuta confrontando quando ci si aspetterebbe in ingresso da un’onda riflessa non attenuata e quanto effettivamente misurato [vedi (113)–(115)]. Indicando per semplicità  $V_{in}$  con  $A$  e  $V(x = 0, t = 2t_l)$  con  $B$ , e chiamando  $\eta$  il *fattore di attenuazione*  $e^{-2\alpha l}$ , riscriviamo la (113) come

$$\eta = e^{-2\alpha l} = \frac{1}{\Gamma} \frac{B}{A} - 1, \quad (135)$$

$$\alpha = -\frac{\ln \eta}{2l}, \quad (136)$$

ove, ricordiamo, il coefficiente di riflessione  $\Gamma$  vale  $+1$  per linea aperta e  $-1$  per corto circuito.

- L’impedenza caratteristica della linea può essere misurata da un uno studio di  $\Gamma$  in funzione della resistenza di carico  $R_c$ , facendo uso della (108).  $\Gamma$  può essere misurato dal confronto di  $V_{in}$  (qui ‘ $A$ ’) e  $V(x = 0, t = 2t_l)$  (qui ‘ $B$ ’):

$$\frac{B}{A} = 1 + \Gamma \eta, \quad (137)$$

ove  $\eta$  era stato misurato al punto precedente. Otteniamo quindi

$$\Gamma = \frac{1}{\eta} \left( \frac{B}{A} - 1 \right), \quad (138)$$

da cui

$$R_0 = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} R_c. \quad (139)$$

Si possono ricavare diverse stime di  $R_0$  per diversi valori di  $R_c$  e quindi farne la media, oppure ricavare  $R_0$  da una analisi grafica di  $(1 + \Gamma)/(1 - \Gamma)$  in funzione di  $R_c$  (essendo  $1/R_0$  il fattore di proporzionalità).

Nell’approssimazione in cui l’attenuazione è trascurabile, ovvero  $\eta = 1$ , dalla (137) si ottiene

$$R_0 = R_c \left( \frac{2A}{B} + 1 \right), \quad (140)$$

ovvero

$$\frac{A}{B} = \frac{R_0}{2R_c} + \frac{1}{2}. \quad (141)$$

Quest’ultima può essere utile per ricavarsi  $R_0$  dall’andamento di  $A/B$  in funzione di  $1/R_c$ .

**Misure con ‘onde corte’** Usando onde di durata minore di  $2t_l$  osservare i vari tipi di riflessioni per linea aperta o cortocircuitata in uscita. Anche in questo caso i dati raccolti per determinare velocità, costante di attenuazione e  $R_0$ .

**Ossevezione delle riflessioni in ingresso** Mediante una T da mettere all'uscita del generatore aggiungere  $50\Omega$  in parallelo a  $R_G$ . In questo modo le onde riflesse dall'uscita disadattata saranno riflesse anche all'ingresso. Di nuovo, queste misure possono essere usate per determinare le caratteristiche della linea, in modo speciale la costante di attenuazione, visto il numero di rimbalzi che subisce l'onda.

**Osservazioni e misure con onda quadra bipolare** Con riferimento alla figura 11, descriviamo soltanto come misurare  $v$ ,  $\alpha$  e  $R_0$  usando 'onde lunghe', in analogia con quanto illustrato precedentemente per il caso di onda unipolare.

- la velocità di trasmissione può essere determinata come nel caso precedente, misurando il ritardo
- Per quanto riguarda la determinazione di  $\alpha$  e  $R_0$ , una potenziale sorgente di errore . . . di sbaglio è dovuta alla difficoltà di determinare l'istante  $t = 0$  al quale parte il fronte positivo dal generatore. L'uso del trigger esterno aiuta senz'altro a risolvere le ambiguità. Chiamando anche in questo caso  $A$  l'ampiezza del segnale in ingresso a  $t = 0$  e  $B$  l'ampiezza del segnale a  $t = 2t_l$ . Dalle (123) e (127) si ottiene

$$\frac{B}{A} = \frac{1 + \Gamma\eta}{1 - \Gamma\eta}. \quad (142)$$

- $\eta$  (e quindi  $\alpha$ ) può essere stimata aprendo o cortocircuitando la linea, valendo, rispettivamente:

$$\eta(\Gamma = -1) = \frac{A - B}{A + B} \quad (143)$$

$$\eta(\Gamma = +1) = \frac{B - A}{A + B}. \quad (144)$$

- $\Gamma$  per vari valori di  $R_c$  può essere ottenuto dalle misure di  $A$  e  $B$  come

$$\Gamma = \frac{1}{\eta} \frac{B - A}{A + B}. \quad (145)$$

Dai diversi valori di  $\Gamma$  per le diverse  $R_c$  si ricava  $R_0$  in modo analogo a quanto descritto precedentemente per segnali unipolari.

Si noti come nell'approssimazione di attenuazione trascurabile (ovvero  $\eta \approx 1$ ), la (142) si riduce a

$$R_c \approx R_0 \frac{B}{A}, \quad (146)$$

ovvero  $R_0$  può essere ricavato dall'andamento di  $R_c$  in funzione di  $B/A$ .