

ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

CALCOLO VETTORIALE

- DEFINIZIONE DI VETTORE
- COMPONENTI DI UN VETTORE
- SOMMA E DIFFERENZA
- PRODOTTO SCALARE
- PRODOTTO VETTORIALE
- VETTORE GRADIENTE
- FLUSSO DI UN VETTORE

Lucidi del Prof. D. Scannicchio

VETTORE

- caratterizzato da 3 dati



\vec{V} [modulo v , $|\vec{v}|$
direzione
verso

(lettera v in grassetto)

esempi

spostamento s

$$s = 16.4 \text{ m}$$

velocità v

$$v = 32.7 \text{ m s}^{-1}$$

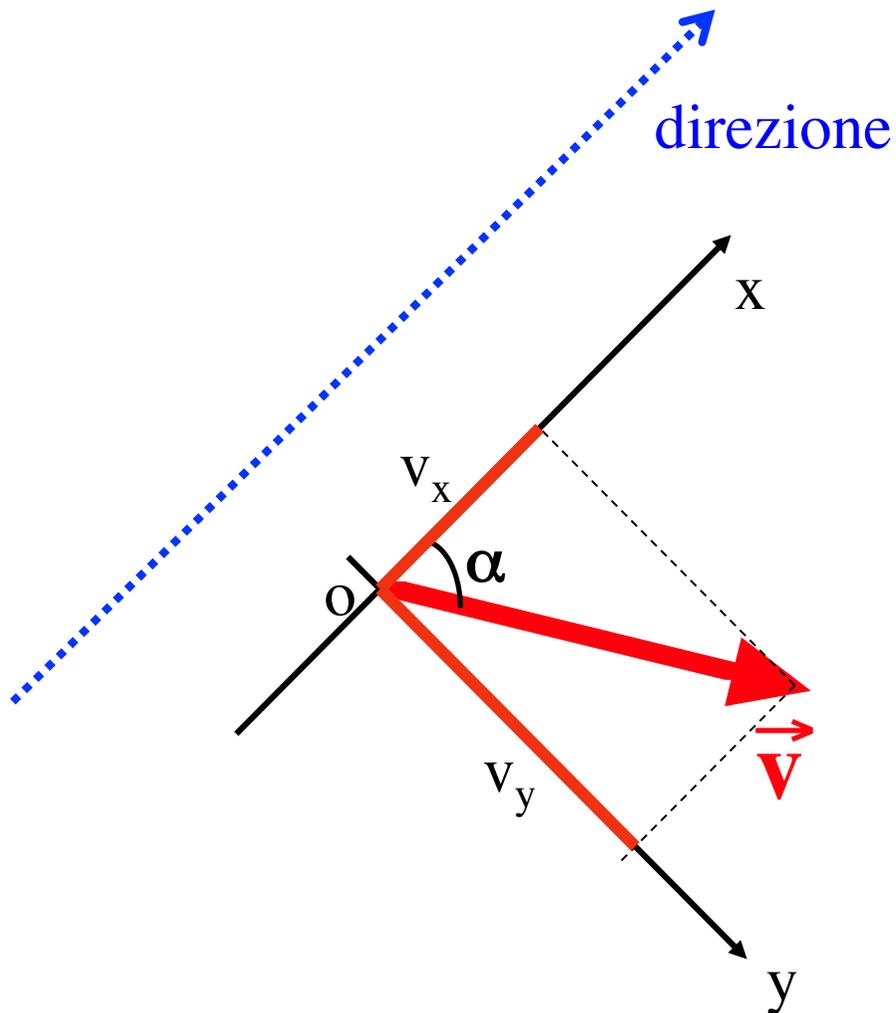
accelerazione a

$$a = 9.8 \text{ m s}^{-2}$$



COMPONENTE DI UN VETTORE

(lungo una direzione)



$$\blacksquare v_y = v \sin \alpha$$

$$\blacksquare v_x = v \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} v_y^2 + v_x^2 &= \\ &= v^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha = \\ &= v^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= v^2 \end{aligned}$$

VERSORE

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

modulo = 1

direzione \vec{v}

verso \vec{v}

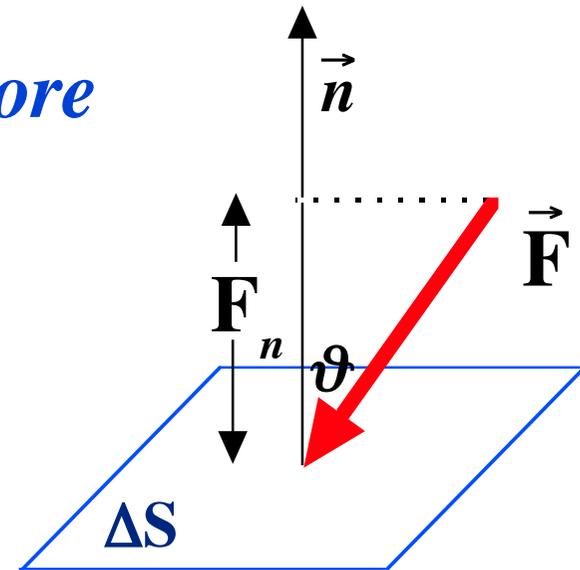
$\vec{n} \equiv$ direzione e verso

esempio: componente di un vettore

$$F_n = F \cos \vartheta$$

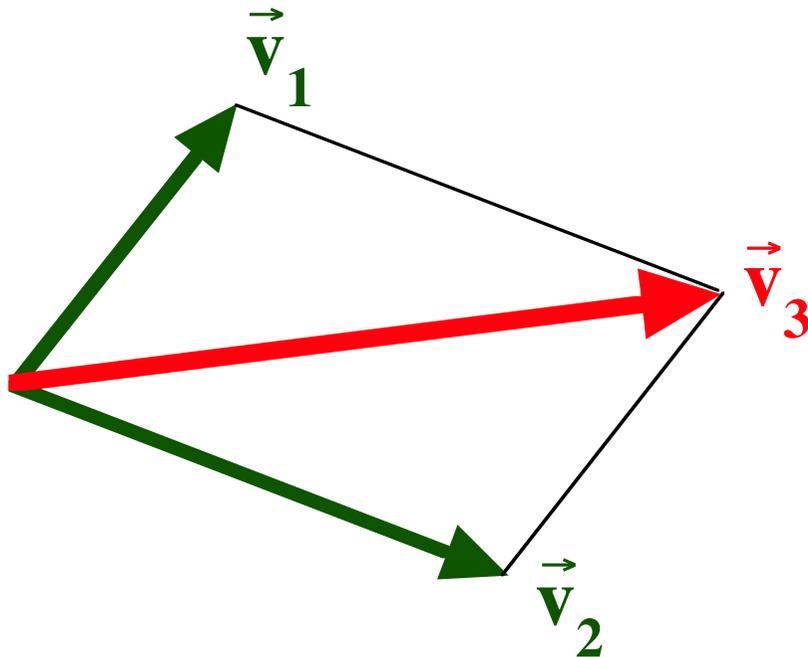
prodotto scalare fra il
vettore forza \vec{F} e il versore \vec{n}

$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{n} = F \cos \theta$$



SOMMA DI VETTORI

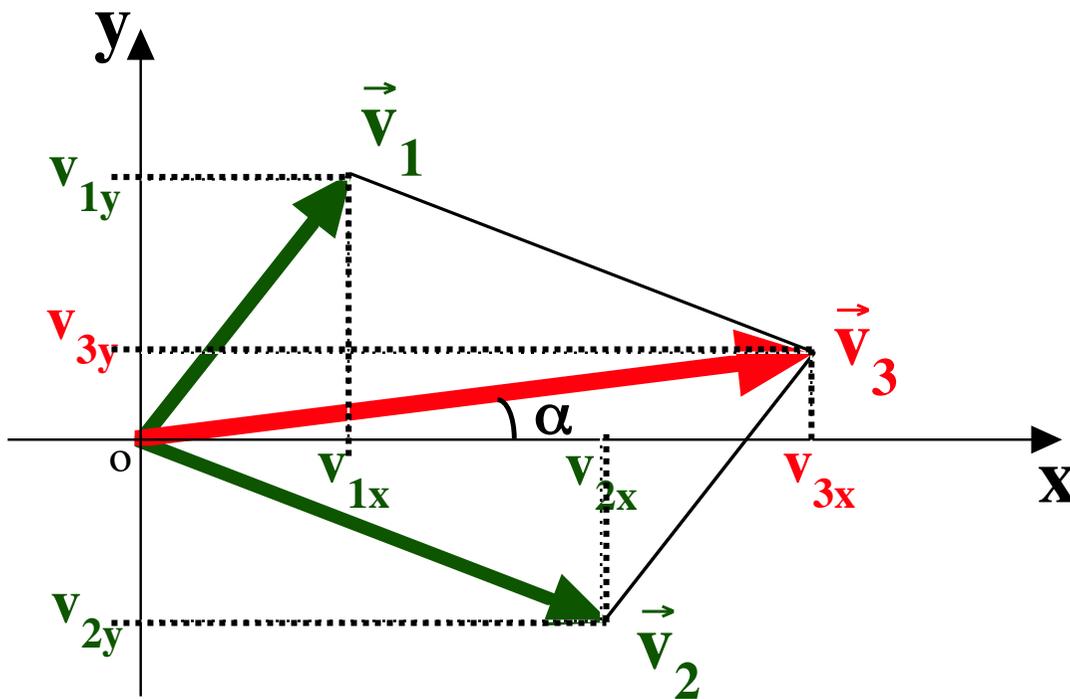
■ regola del parallelogramma
(metodo grafico)



$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

SOMMA DI VETTORI

■ metodo per componenti
(metodo quantitativo)



$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} + v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} + v_{2y} \end{cases}$$

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}$$

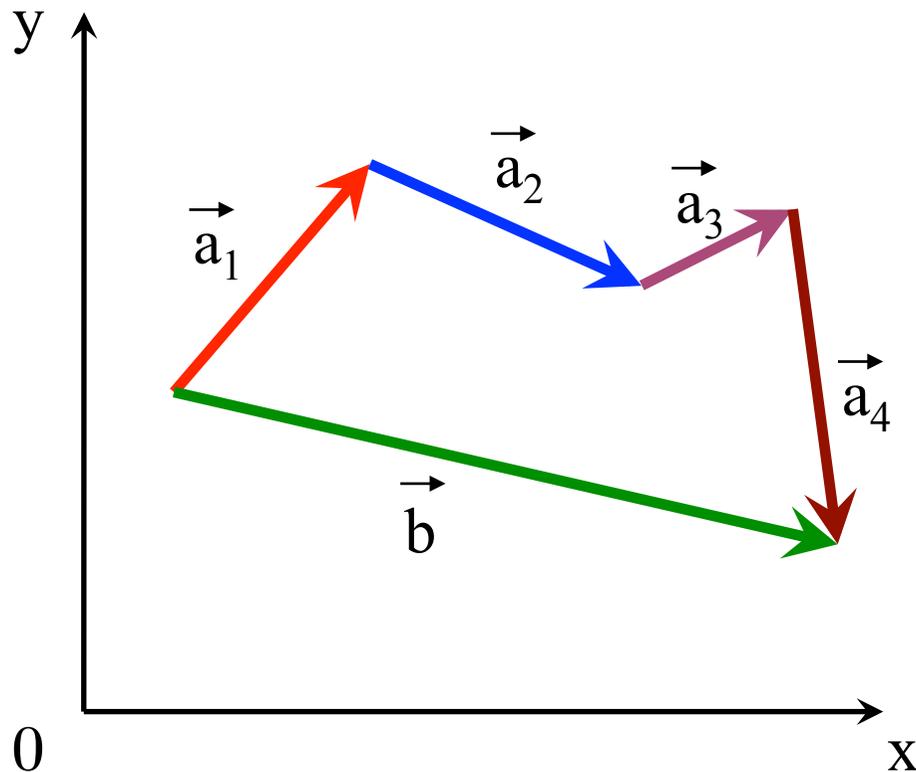
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$$

■ 3 dimensioni: componente asse z

Somma di N vettori

Dati i vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ il vettore somma $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_N$ si calcola nel modo seguente:

- si costruisce la spezzata formata dai vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$
- si congiungono i due estremi liberi di tale spezzata

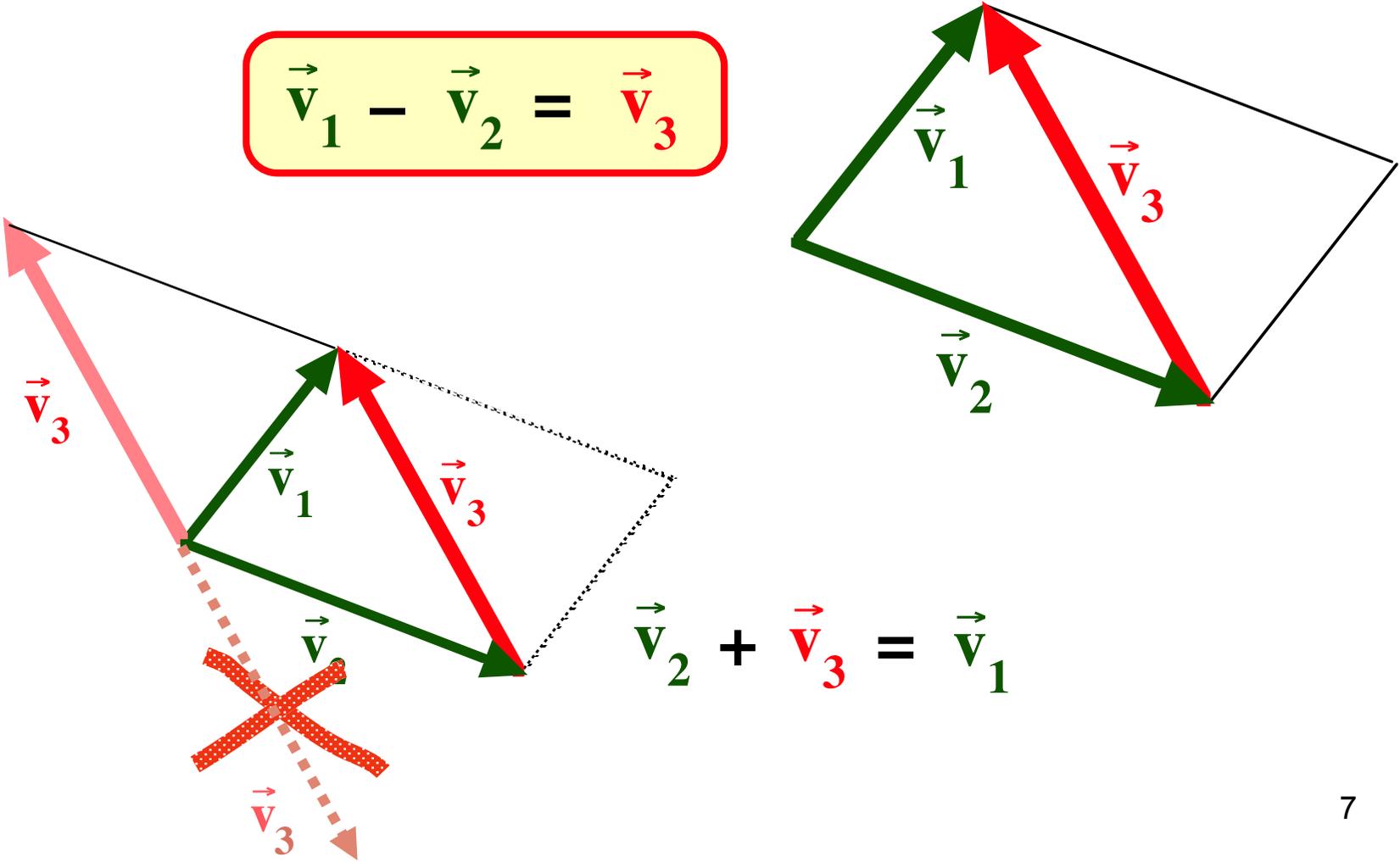


$$\begin{aligned} b_x &= a_{1x} + a_{2x} + \dots + a_{Nx} \\ b_y &= a_{1y} + a_{2y} + \dots + a_{Ny} \end{aligned}$$

DIFFERENZA DI VETTORI

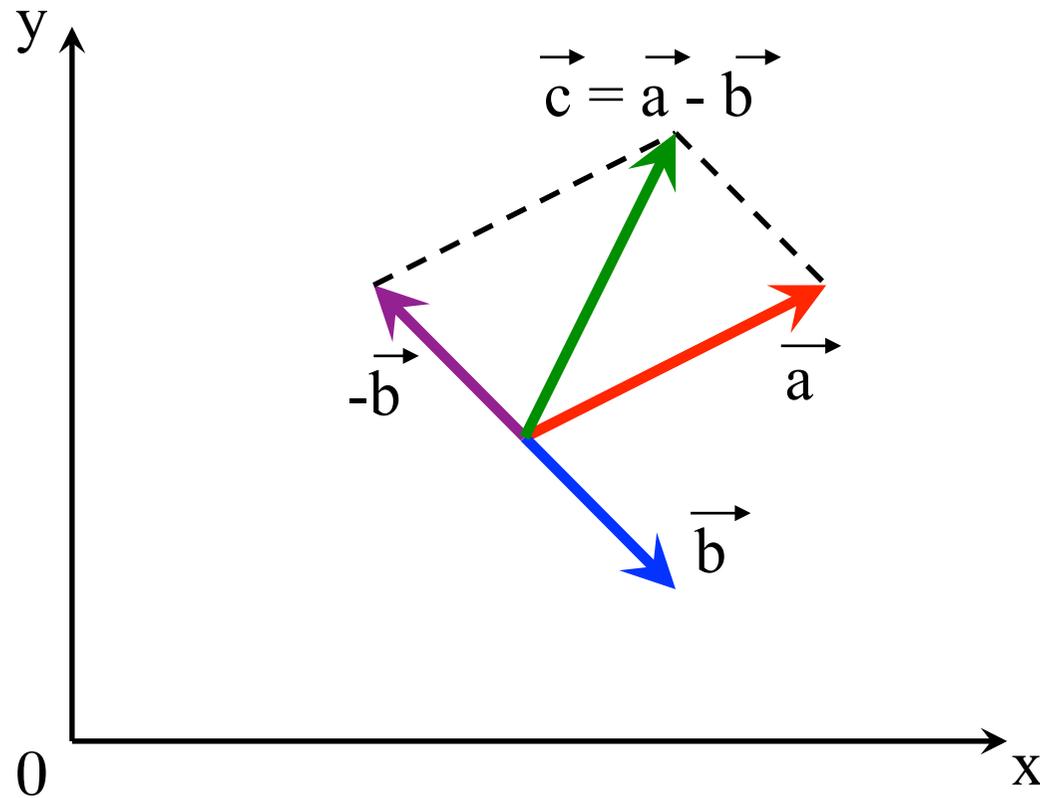
■ regola del parallelogramma
(metodo grafico)

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$



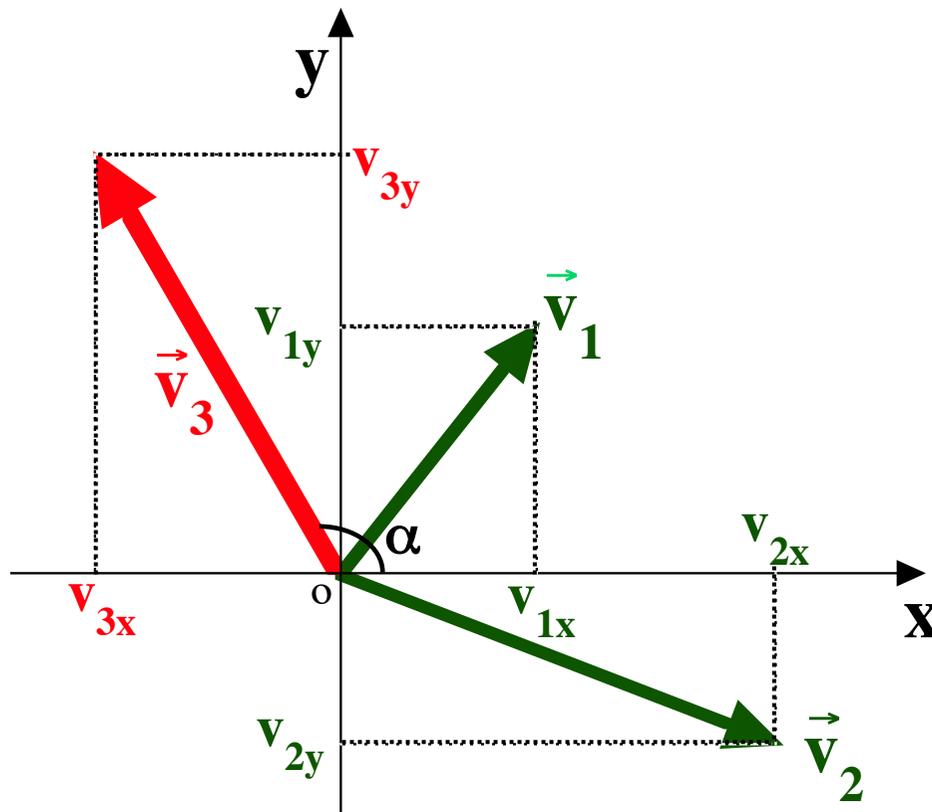
Differenza di due vettori

La differenza $\vec{a} - \vec{b}$ si calcola sommando al vettore \vec{a} il vettore $-\vec{b}$, opposto del vettore \vec{b}



DIFFERENZA DI VETTORI

metodo per componenti
(metodo quantitativo)



$$\begin{cases} v_{1x} - v_{2x} = v_{3x} \\ v_{1y} - v_{2y} = v_{3y} \end{cases}$$

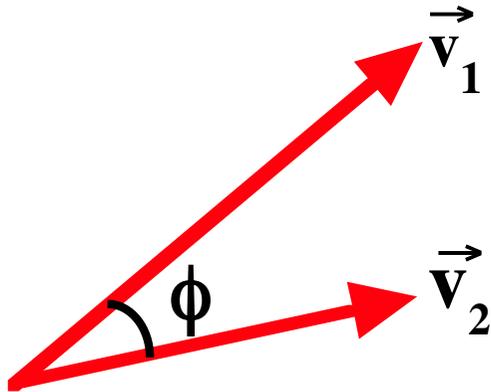
$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$$

3 dimensioni: componente asse z



PRODOTTO SCALARE



$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \phi$$

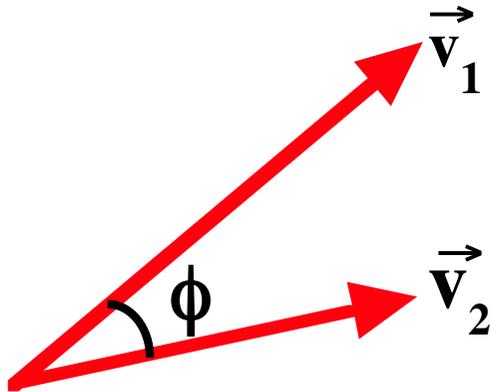
- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y}$ *
- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$ **proprietà commutativa**
- $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$ **proprietà associativa**

■ **3 dimensioni: componente asse z**

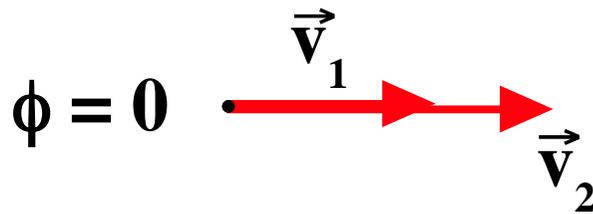
$$* + v_{1z} v_{2z}$$



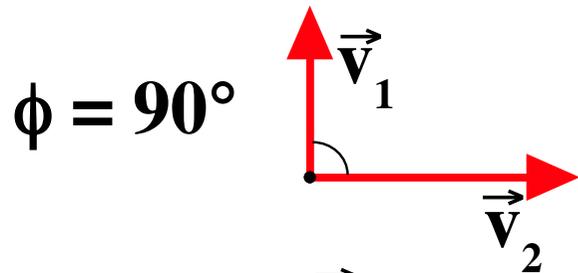
PRODOTTO SCALARE



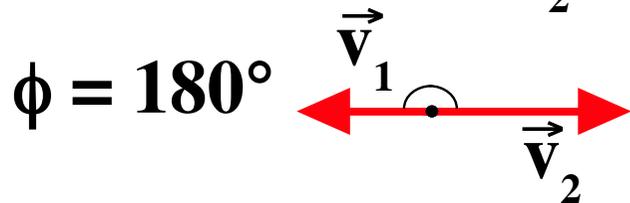
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \phi$$



• $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \phi = v_1 v_2$

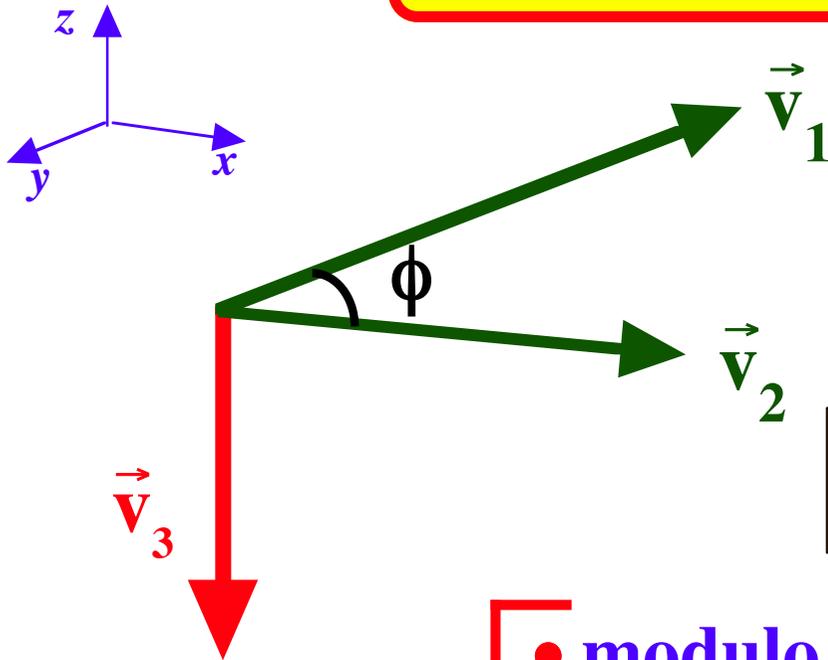


• $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \phi = 0$



• $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \phi = -v_1 v_2$

PRODOTTO VETTORIALE



$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

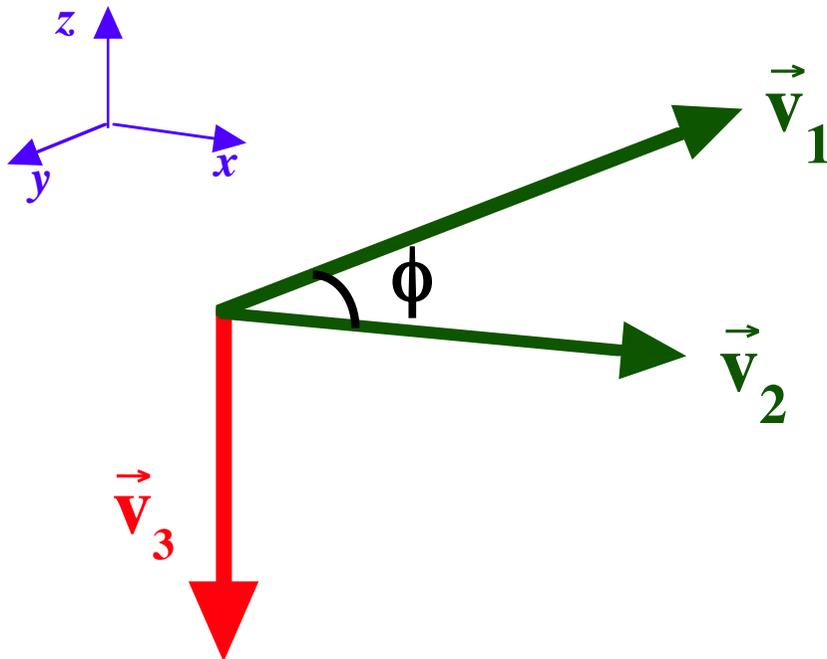
Notazione alternativa: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_3$

- **modulo** $|\vec{v}_3| = v_1 v_2 \text{ sen } \phi$
- **direzione** $\perp \vec{v}_1, \vec{v}_2$
- **verso** : avanzamento vite che ruota sovrapponendo \vec{v}_1 su \vec{v}_2

PRODOTTO VETTORIALE

3 dimensioni: componente asse z

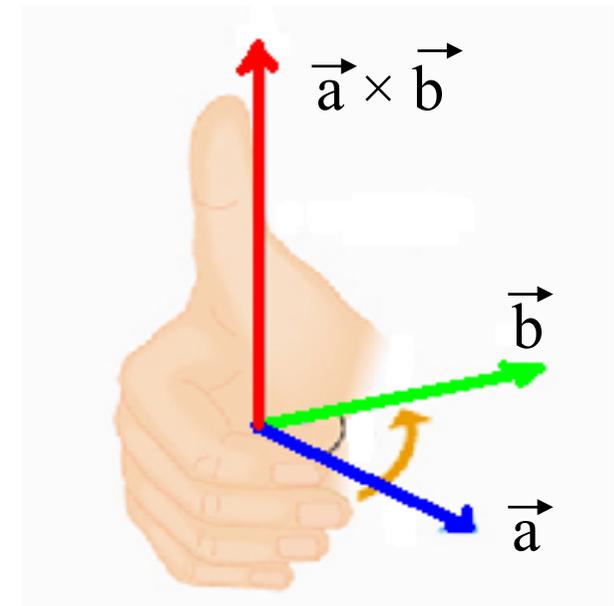
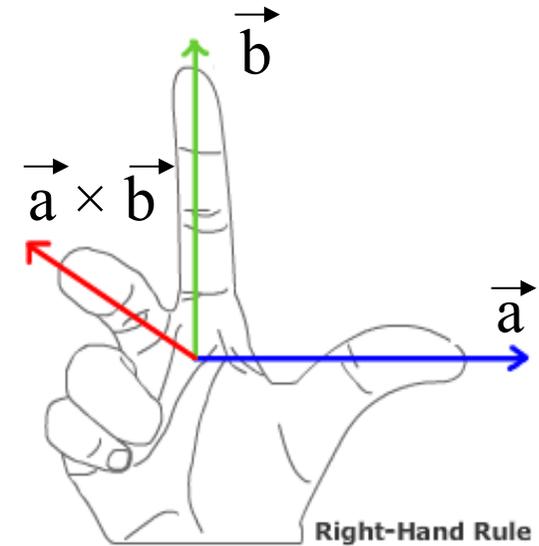
$$\bullet \mathbf{V}_{3z} = \mathbf{V}_{1x} \mathbf{V}_{2y} - \mathbf{V}_{2x} \mathbf{V}_{1y}$$



$$\vec{\mathbf{V}}_1 \wedge \vec{\mathbf{V}}_2 = \vec{\mathbf{V}}_3$$

La regola della mano destra

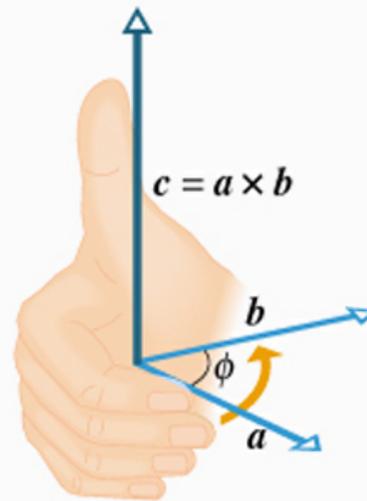
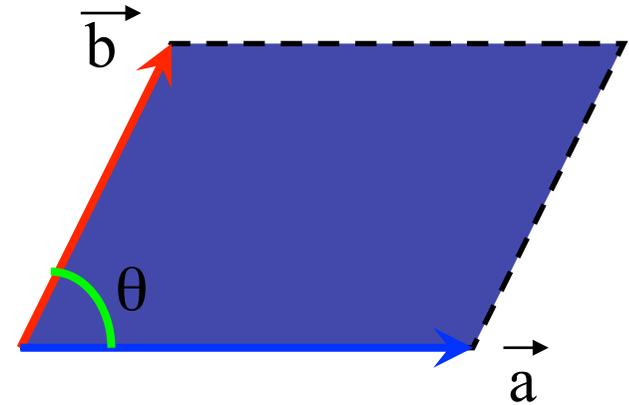
- Prima formulazione
 - Si dispone il pollice lungo il primo vettore
 - Si dispone l'indice lungo il secondo vettore
 - Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale
- Seconda formulazione
 - Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice
 - Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo θ di rotazione sia minore di 180°
 - Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale



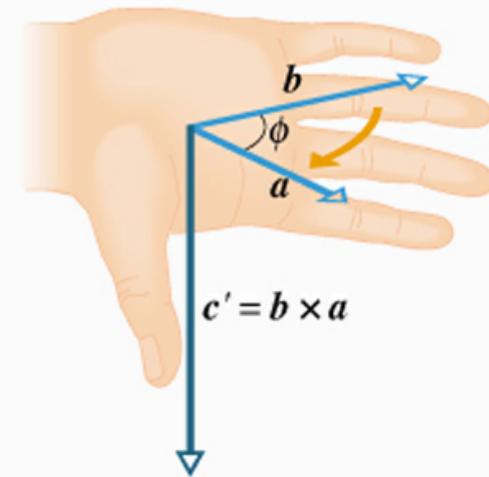
Proprietà del prodotto vettoriale

- Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori
- Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli ($\theta=0$)
- Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$



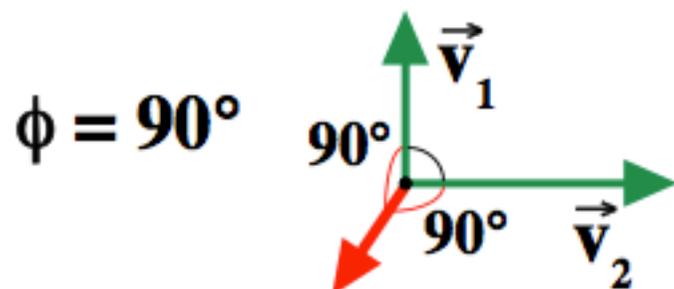
(a)



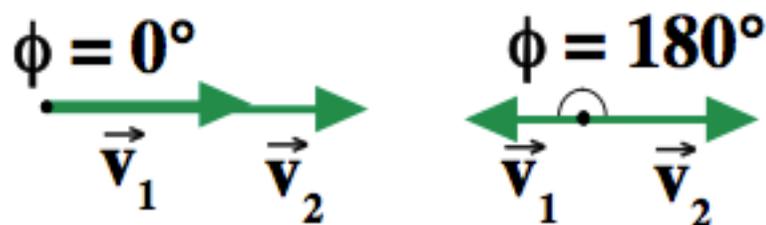
(b)

PRODOTTO VETTORIALE

- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ **proprietà anti-commutativa**
- $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$ **proprietà associativa**



- $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \text{sen } \phi = v_1 v_2$



- $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \text{sen } \phi = 0$

MOMENTO DI UNA FORZA

esempio

$$\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\overline{OA} = r = 2 \text{ cm}$$

$$F = 1000 \text{ N}$$

$$\phi = 63^\circ$$

\vec{M}

modulo $F r \sin \phi = 1000 \text{ N} \times 2 \text{ cm} \sin 63^\circ =$
 $= 17.82 \text{ N m}$

direzione $\perp \vec{r}, \vec{F}$

verso avanzamento vite che
ruota sovrapponendo \vec{r} su \vec{F}

