ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

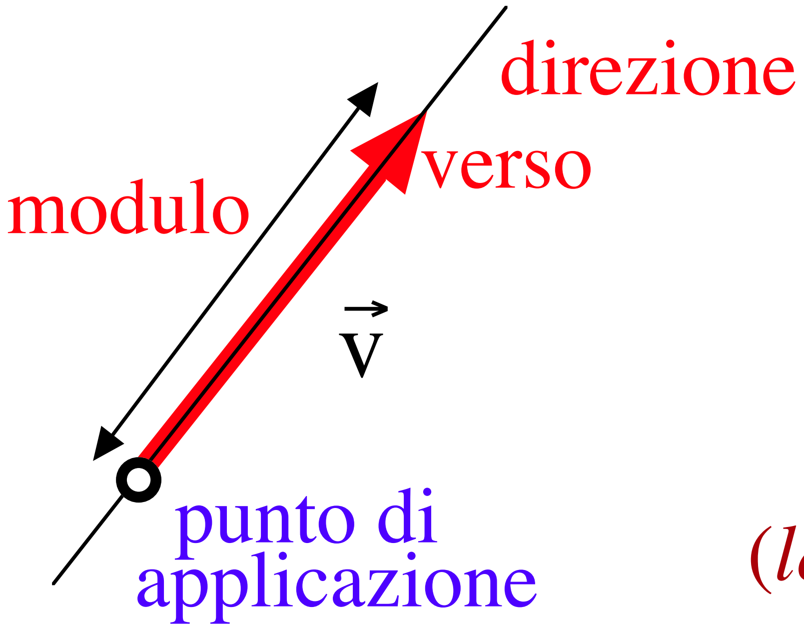
CALCOLO VETTORIALE

- DEFINIZIONE DI VETTORE
- COMPONENTI DI UN VETTORE
- SOMMA E DIFFERENZA
- PRODOTTO SCALARE
- PRODOTTO VETTORIALE
- VETTORE GRADIENTE
- FLUSSO DI UN VETTORE

Lucidi del Prof. D. Scannicchio

VETTORE

- **caratterizzato da 3 dati**



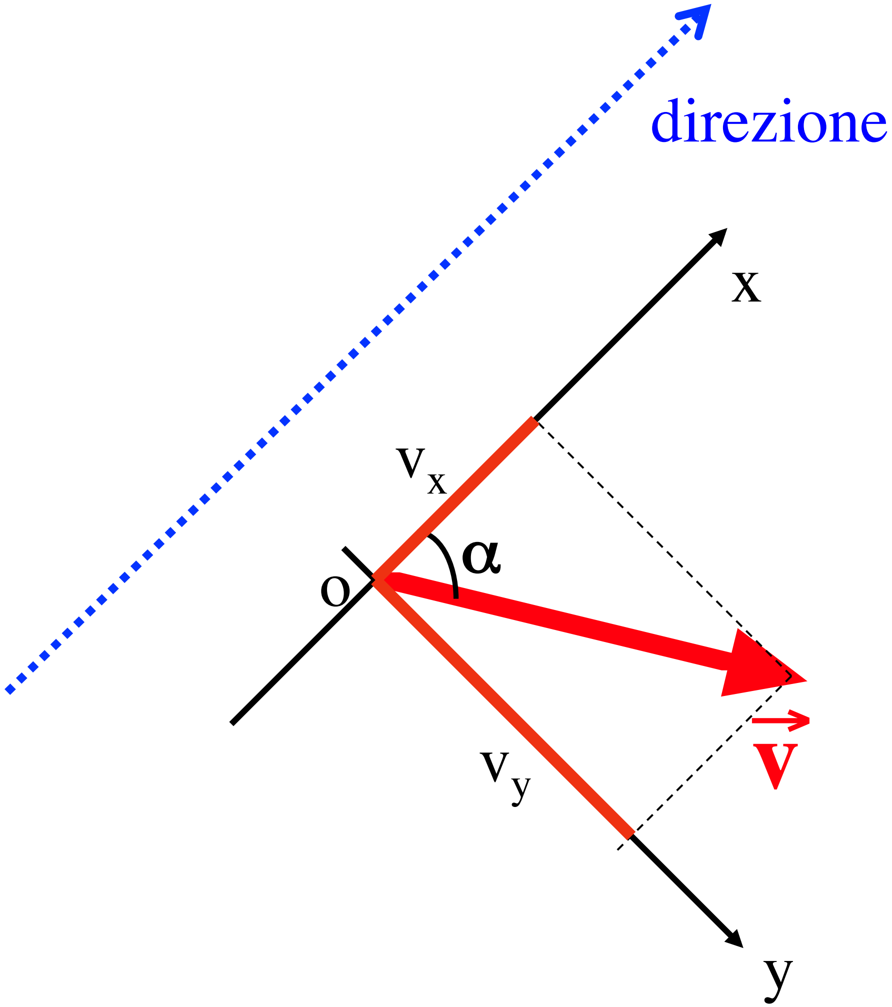
$\vec{V}$ [**modulo** $\mathbf{v}$, $|\vec{\mathbf{v}}|$
direzione
verso

(*lettera* **v** *in grassetto*)

esempi	spostamento **s**	s = 16.4 m
	velocità **v**	$v = 32.7\ m\ s^{-1}$
	accelerazione **a**	$a = \ \ 9.8\ m\ s^{-2}$

COMPONENTE DI UN VETTORE

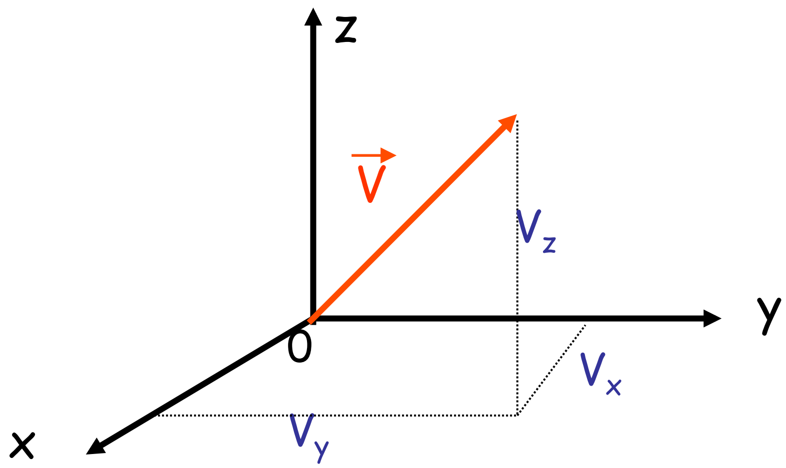
(lungo una direzione)



- $v_y = v \text{ sen } \alpha$
- $v_x = v \cos \alpha$

$$v_y^2 + v_x^2 =$$
$$= v^2 \text{ sen}^2\alpha + v^2 \cos^2\alpha =$$
$$= v^2(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) =$$
$$= v^2$$

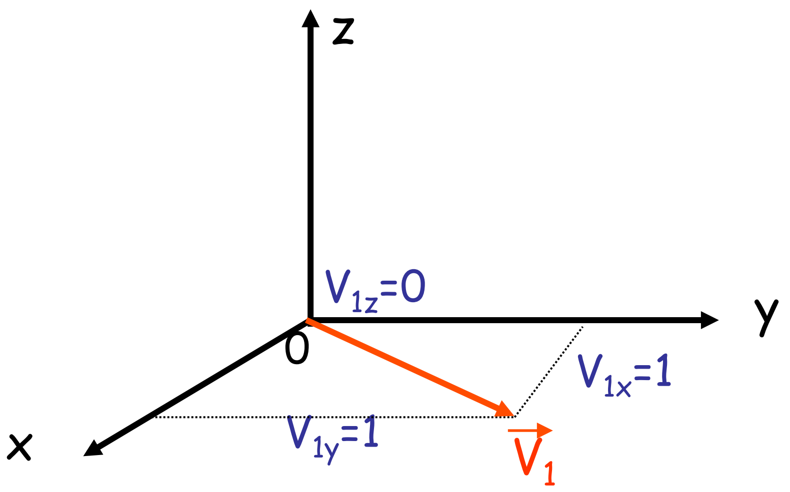
Un vettore e' individuato da un insieme di tre numeri, ad esempio le 3 coordinate cartesiane V_x, V_y e V_z del punto estremo del vettore (quello col simbolo di freccia), avendo posizionato l'altro estremo all'origine (punto O) del sistema di riferimento cartesiano (costituito dai tre assi X,Y,Z). V_x, V_y e V_z vengono indicate come le componenti o "proiezioni" del vettore lungo i tre assi coordinati.



$$\vec{V}=(V_x,V_y,V_z)$$

Esempio 1

Il vettore con componenti V_{1x}=1 V_{1y} =1 e V_{1z}=0 si indica cosi': $\vec{V}_1 = (1,1,0)$
ed e' un vettore che giace sul piano X,Y (vedi figura)

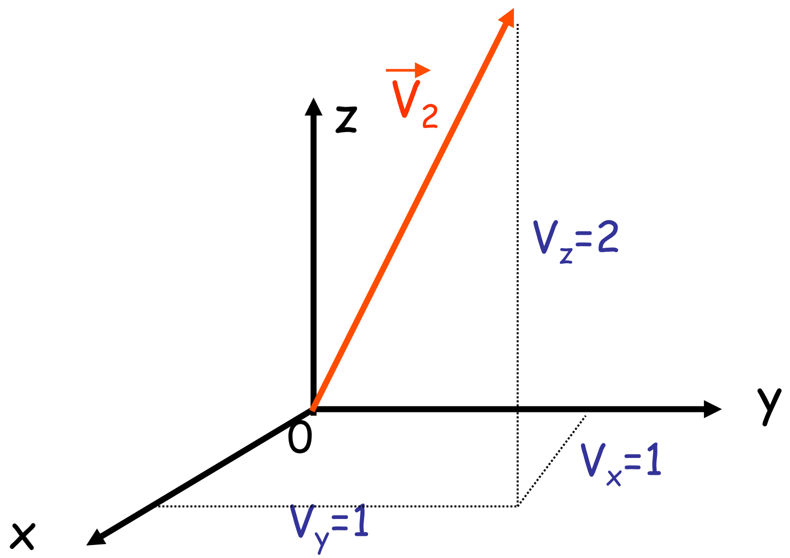


Il modulo del vettore e'

$$\left|\vec{V}_1\right| = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2 + V_{1z}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \cong 1.41$$

Esempio 2

Il vettore con componenti V_{2x}=1 V_{2y} =1 e V_{2z}=2 si indica cosi': $\vec{V}_2 = (1,1,2)$ (vedi figura)



Il modulo del vettore e'

$$\left|\vec{V}_2\right| = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2 + V_{2z}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \cong 2.45$$

VERSORE

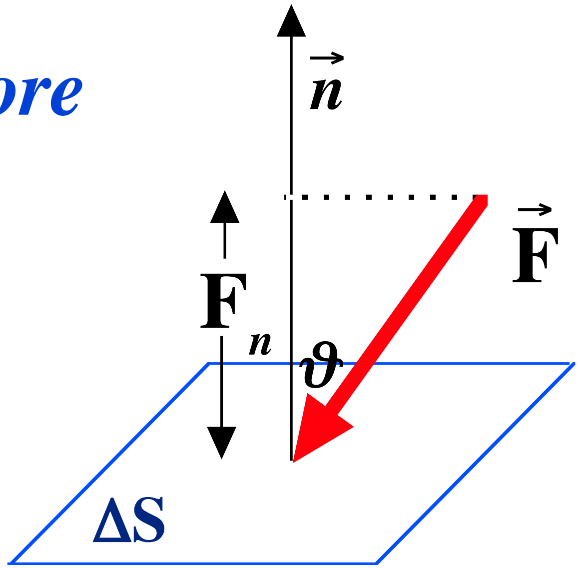
$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

- modulo = 1
- direzione $\vec{v}$
- verso $\vec{v}$

$\vec{n} \equiv$ direzione e verso

esempio: componente di un vettore

$$F_n = F \cos\vartheta$$

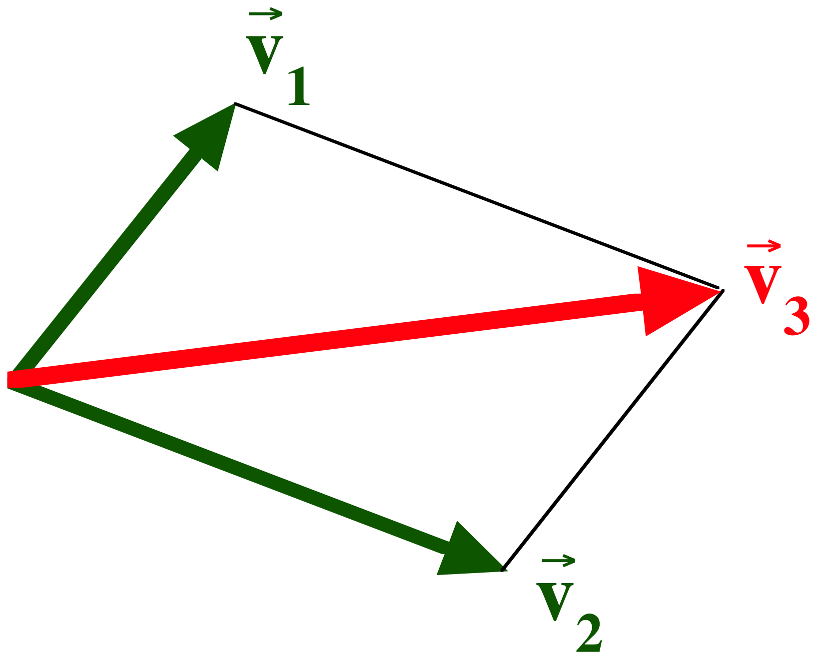


prodotto scalare fra il vettore forza $\vec{F}$ e il versore $\vec{n}$

$$F_n = \vec{F} \cdot \vec{n} = F \cos\theta$$

SOMMA DI VETTORI

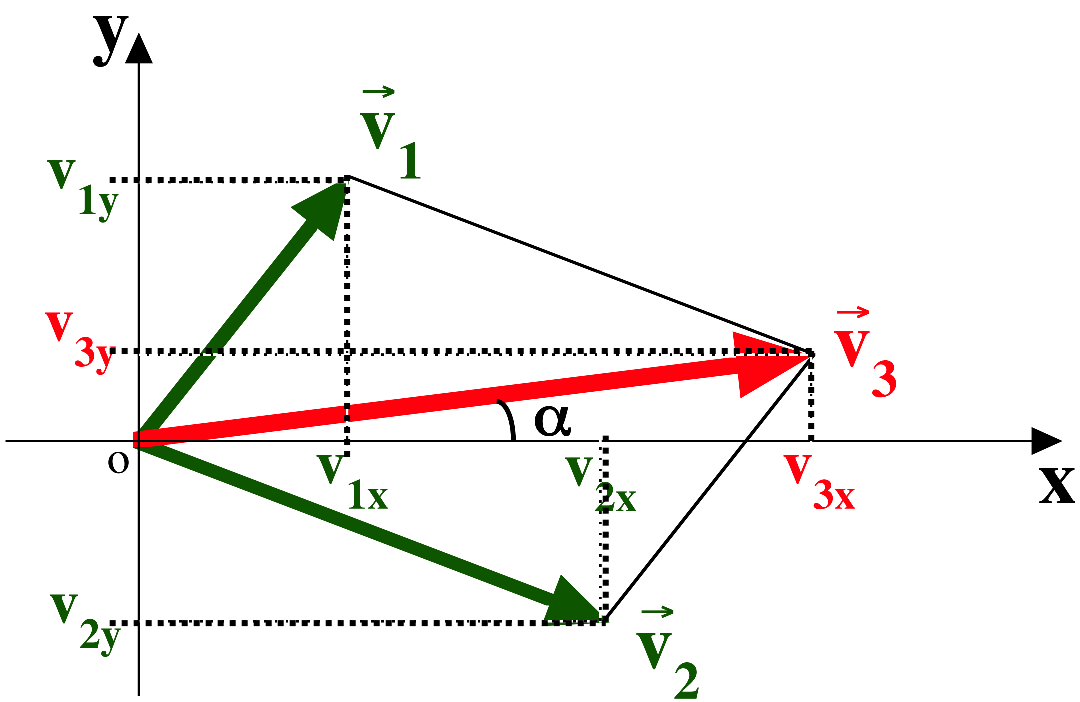
- **regola del parallelogramma**
  (metodo grafico)



$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

SOMMA DI VETTORI

- **metodo per componenti**
  (metodo quantitativo)



$$\begin{cases} v_{3x} = v_{1x} + v_{2x} \\ v_{3y} = v_{1y} + v_{2y} \end{cases}$$

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$$

- **3 dimensioni: componente asse z**

Esempio 3

Somma dei vettori:
$$\vec{V}_1 = (1,1,0)$$
$$\vec{V}_2 = (1,1,2)$$

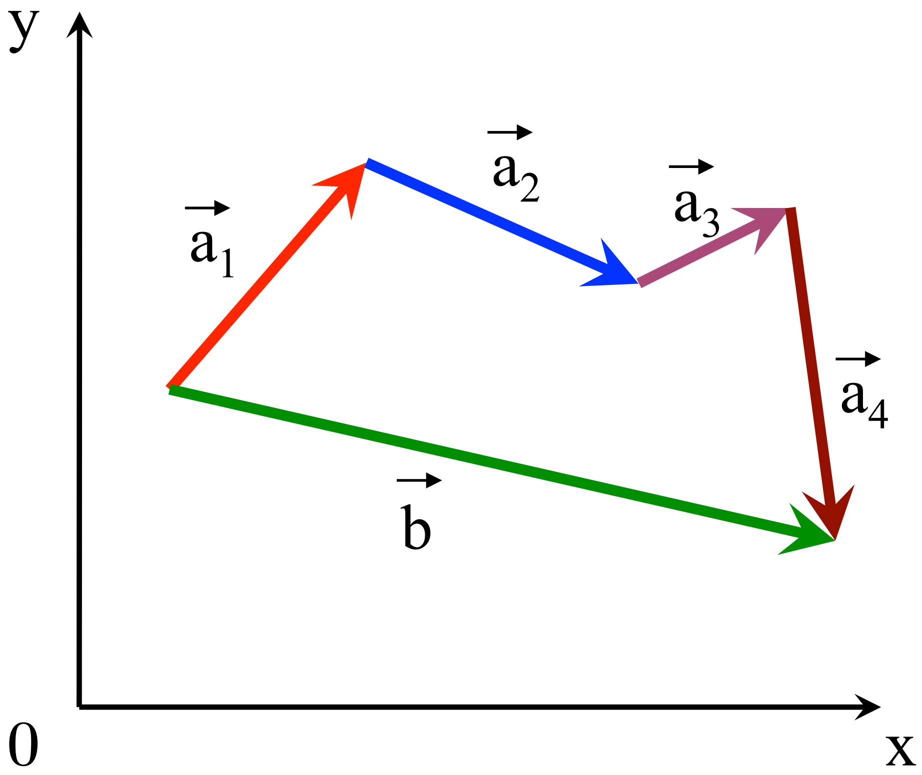
$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$
$$= \left(V_{3x}, V_{3y}, V_{3z}\right) = \left(V_{1x} + V_{2x}, V_{1y} + V_{2y}, V_{1z} + V_{2z}\right)$$
$$= (1+1, 1+1, 0+2) = (2,2,2)$$

Il modulo del vettore somma e'
$$\left|\vec{V}_3\right| = \sqrt{V_{3x}^2 + V_{3y}^2 + V_{3z}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} \cong 3.46$$

Somma di N vettori

Dati i vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_N$ il vettore somma $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_N$ si calcola nel modo seguente:

- si costruisce la spezzata formata dai vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_N$
- si congiungono i due estremi liberi di tale spezzata



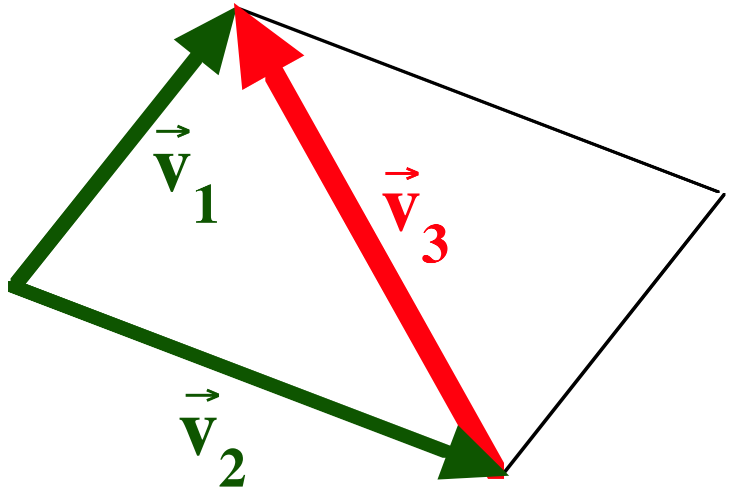
$$b_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{Nx}$$

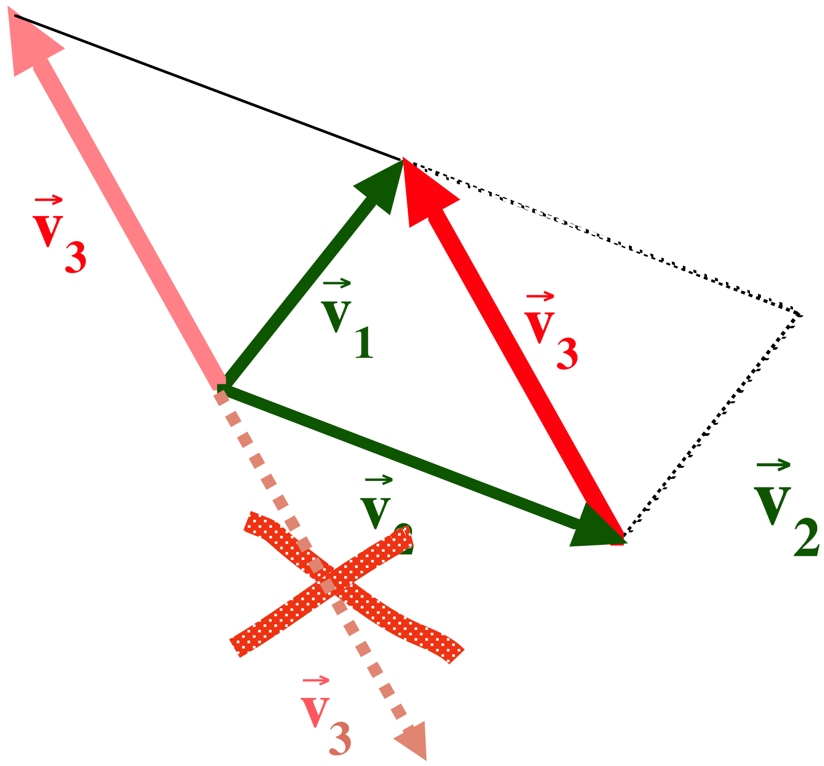
$$b_y = a_{1y} + a_{2y} + \ldots + a_{Ny}$$

DIFFERENZA DI VETTORI

- **regola del parallelogramma**
  (metodo grafico)

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

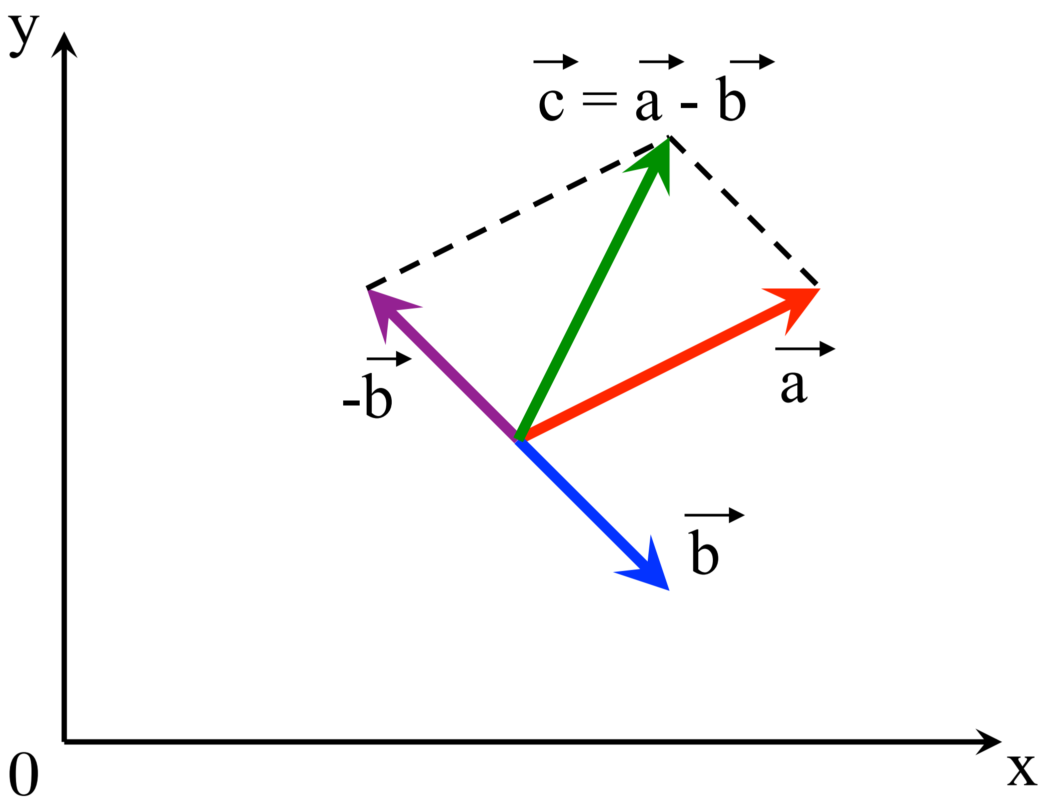




$$\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_1$$

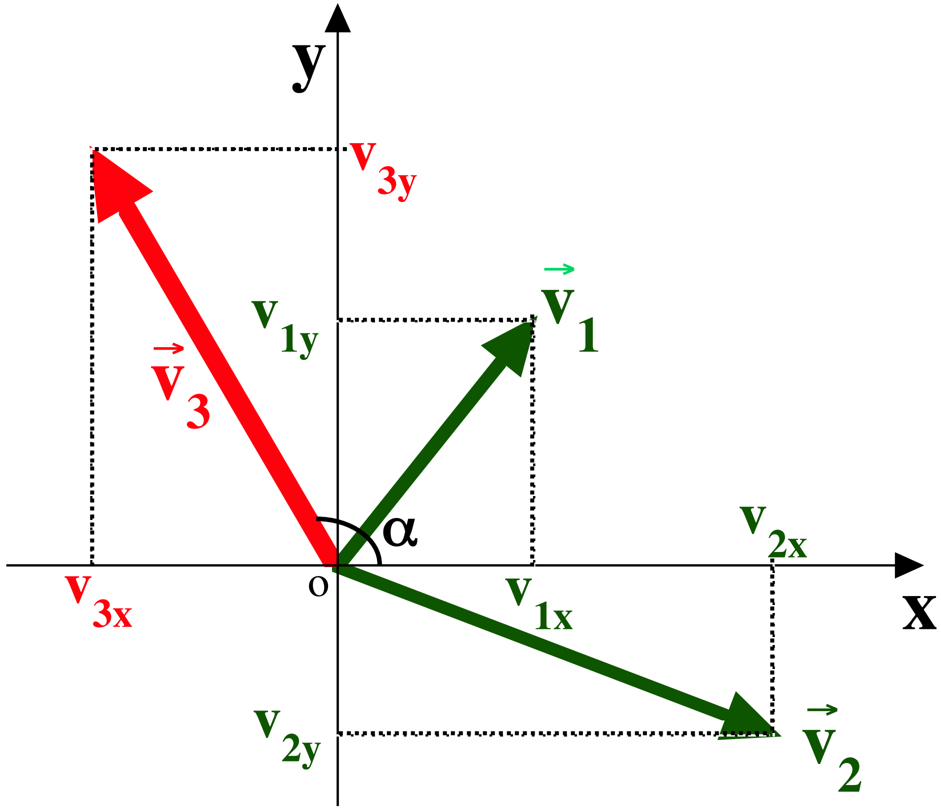
Differenza di due vettori

La differenza $\vec{a} - \vec{b}$ si calcola sommando al vettore $\vec{a}$ il vettore $-\vec{b}$, opposto del vettore $\vec{b}$



DIFFERENZA DI VETTORI

- **metodo per componenti**
  (metodo quantitativo)



$$\begin{cases} v_{1x} - v_{2x} = v_{3x} \\ v_{1y} - v_{2y} = v_{3y} \end{cases}$$

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{3y}}{v_{3x}}$$

- **3 dimensioni: componente asse z**

Esempio 4

Differenza dei vettori: $\vec{V}_1 = (1,1,0)$

$$\vec{V}_2 = (1,1,2)$$

$$\vec{V}_4 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

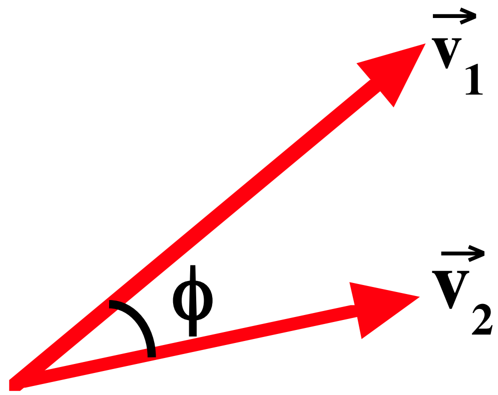
$$= \left(V_{4x}, V_{4y}, V_{4z}\right) = \left(V_{1x} - V_{2x}, V_{1y} - V_{2y}, V_{1z} - V_{2z}\right)$$

$$= (1-1, 1-1, 0-2) = (0,0,-2)$$

Il modulo del vettore differenza e'

$$\left|\vec{V}_4\right| = \sqrt{V_{4x}^2 + V_{4y}^2 + V_{4z}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0+0+4} = \sqrt{4} = 2$$

PRODOTTO SCALARE



Prodotto fra vettori il cui risultato e' uno **scalare!**

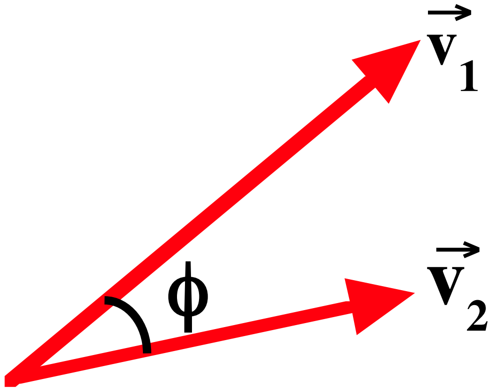
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi$$

- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y}$ *
- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$ proprietà commutativa
- $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$ proprietà associativa

- 3 dimensioni: componente asse z

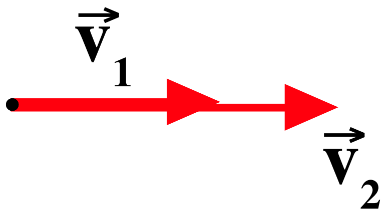
  * $+ v_{1z} v_{2z}$

PRODOTTO SCALARE



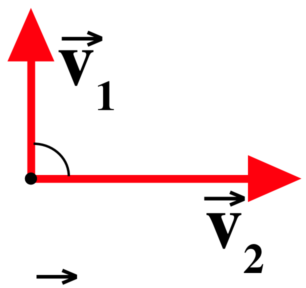
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1\, v_2 \cos\phi$$

$\phi = 0$



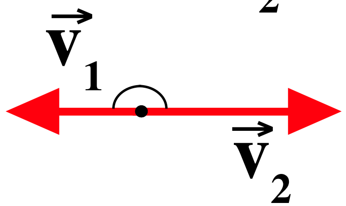
- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi = v_1 v_2$

$\phi = 90°$



- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi = 0$

$\phi = 180°$



- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi = -\, v_1 v_2$

Esempio 5

Prodotto scalare fra i vettori: $\vec{V}_1 = (1,1,0)$

$$\vec{V}_2 = (1,1,2)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} + V_{1z}V_{2z}$$

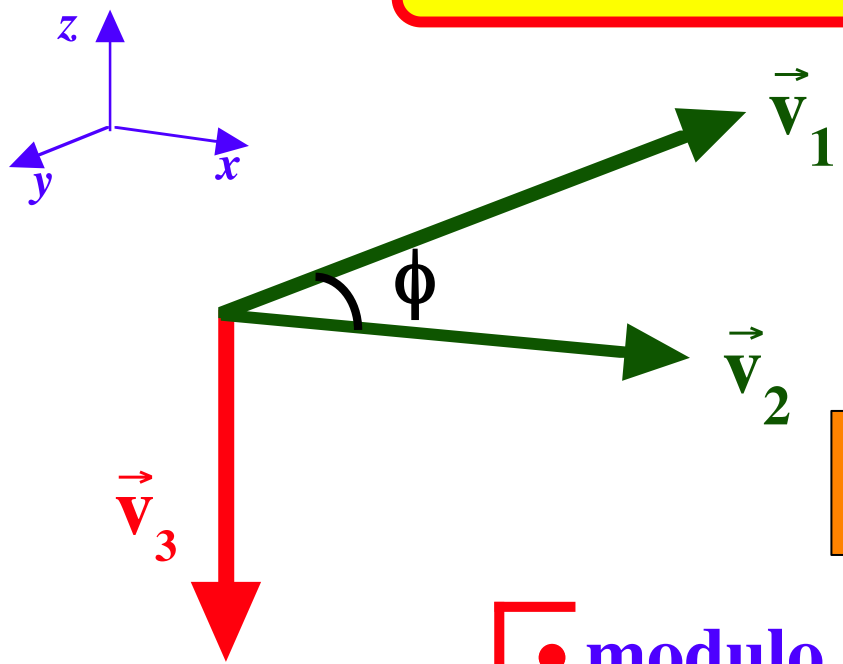
$$= 1*1 + 1*1 + 0*2 = 1 + 1 + 0 = 2$$

Poiche' il prodotto scalare puo' anche essere espresso come il prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo α fra essi compreso, conoscendo il prodotto scalare e conoscendo i moduli dei vettori (vedi esempi 1 e 2) si puo' determinare cosα e quindi α.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |V_1||V_2|\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|V_1||V_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} \cong 0.577$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \arccos(\cos\alpha) = \arccos\frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|V_1||V_2|} = \arccos(0.577) \cong 0.956 \text{ rad} \cong 54.8^\circ$$

PRODOTTO VETTORIALE



Prodotto fra vettori il cui risultato e' un **vettore!**

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

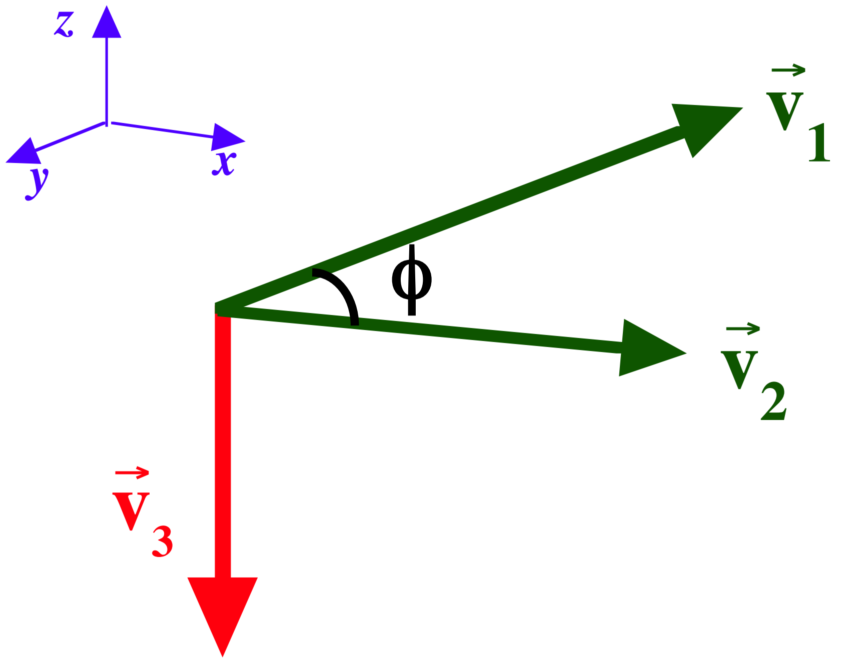
Notazione alternativa: $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_3$

$\vec{v}_3$

- **modulo** $|\vec{v}_3| = v_1 v_2 \,\mathrm{sen}\, \phi$
- **direzione** $\perp \; \vec{v}_1 , \vec{v}_2$
- **verso** : **avanzamento vite che ruota sovrapponendo $\vec{v}_1$ su $\vec{v}_2$**

PRODOTTO VETTORIALE

- 3 dimensioni: componente asse z
  - $v_{3z} = v_{1x}\, v_{2y} - v_{2x}\, v_{1y}$



$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

Prodotto vettoriale

In generale il prodotto vettoriale fra due vettori: $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$

e' un vettore

$$\vec{V}_6 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

con componenti cartesiane:

$$\vec{V}_6 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(V_{6x}, V_{6y}, V_{6z}\right)$$

$$V_{6x} = V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y}$$

$$V_{6y} = V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z}$$

$$V_{6z} = V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x}$$

Esempio 6

Prodotto vettoriale fra i vettori: $\vec{V}_1 = (1,1,0)$

$$\vec{V}_2 = (1,1,2)$$

Conoscendo i moduli dei vettori e l'angolo α fra di essi (vedi esempi 1, 2 e 5) si puo' determinare il modulo del prodotto vettoriale.

$$\vec{V}_6 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$$\left|\vec{V}_6\right| = \left|\vec{V}_1\right|\left|\vec{V}_2\right| \sin\alpha = \sqrt{2}\sqrt{6}\sin(54.8^\circ) \cong 2.83$$

Il prodotto vettoriale e' in generale un vettore con componenti:

$$\vec{V}_6 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left(V_{6x}, V_{6y}, V_{6z}\right) = (2,-2,0)$$

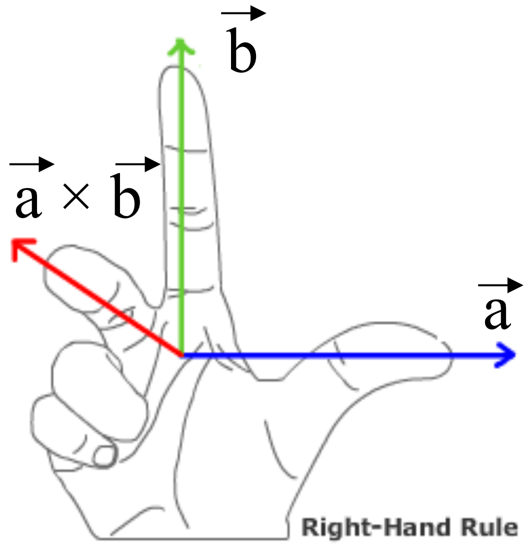
$$V_{6x} = V_{1y}V_{2z} - V_{1z}V_{2y} = 1*2 - 0*1 = 2$$

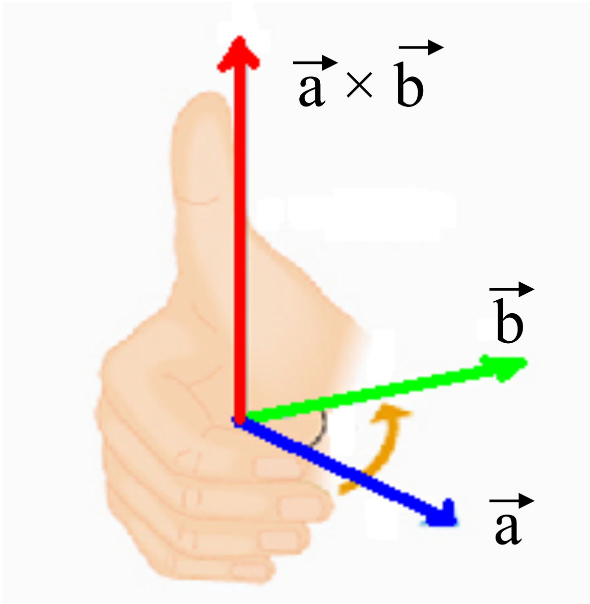
$$V_{6y} = V_{1z}V_{2x} - V_{1x}V_{2z} = 0*1 - 1*2 = -2$$

$$V_{6z} = V_{1x}V_{2y} - V_{1y}V_{2x} = 1*1 - 1*1 = 0$$

La regola della mano destra

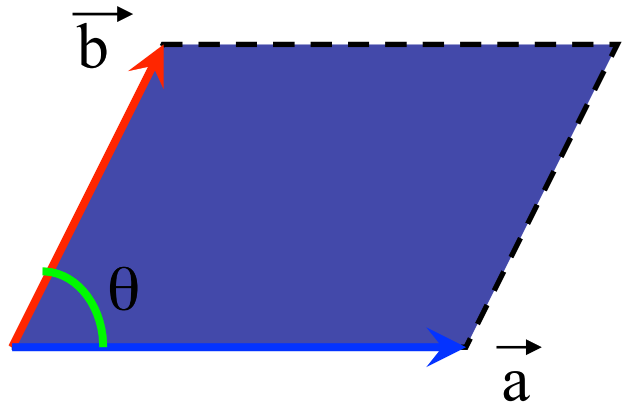
- Prima formulazione
  - Si dispone il pollice lungo il primo vettore
  - Si dispone l'indice lungo il secondo vettore
  - Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale
- Seconda formulazione
  - Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice
  - Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo θ di rotazione sia minore di 180°
  - Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale



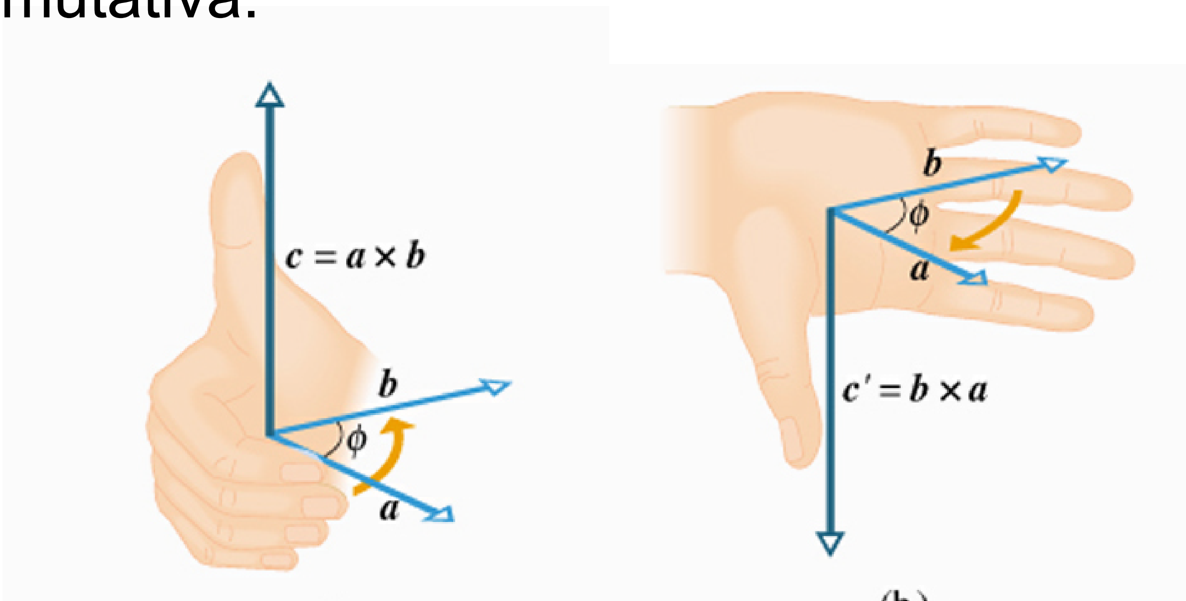


Proprietà del prodotto vettoriale

- Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori
- Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli (θ=0)
- Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:



$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

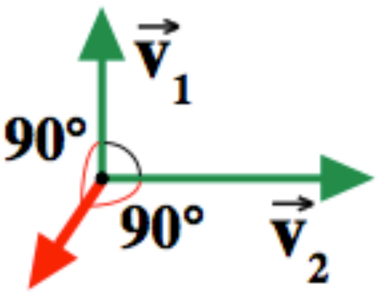


(a) (b)

PRODOTTO VETTORIALE

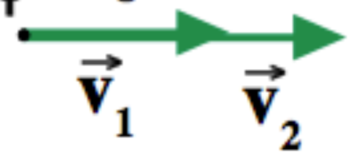
- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\,\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ proprietà anti-commutativa
- $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$ proprietà associativa

$\phi = 90°$

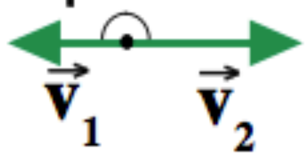


- $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \,\mathrm{sen}\,\phi = v_1 v_2$

$\phi = 0°$



$\phi = 180°$



- $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = v_1 v_2 \,\mathrm{sen}\,\phi = 0$

D. SCANNICCHIO 2007

MOMENTO DI UNA FORZA

esempio

$$\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$\overline{OA} = r = 2\ \text{cm}$

$F = 1000\ \text{N}$

$\phi = 63°$

$\vec{M}$

- **modulo** $F\, r\, \text{sen}\,\phi = 1000\ \text{N} \times 2\ \text{cm sen}\ 63° =$ $= 17.82\ \text{N m}$
- **direzione** $\perp\ \vec{r}, \vec{F}$
- **verso** avanzamento vite che ruota sovrapponendo $\vec{r}$ su $\vec{F}$