Cinematica del “punto materiale”

La cinematica è quella parte della fisica (meccanica) che si occupa di descrivere il moto dei corpi, senza porsi il problema di identificare le cause che lo determinano.

Punto materiale = corpo privo di dimensioni, o le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a quelle della regione di spazio in cui può muoversi e degli altri oggetti con cui può interagire

Esempio: se si vuole studiare il moto della Luna rispetto alla Terra, sia la Luna che la Terra possono essere approssimate a punti materiali, dato che le loro dimensioni sono molto più piccole rispetto alla loro distanza

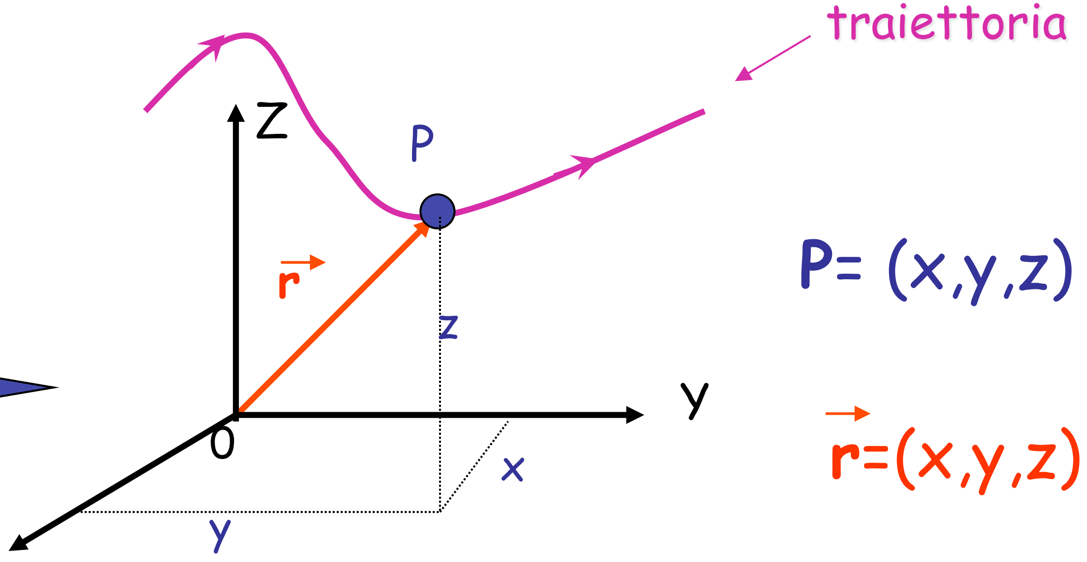
Il moto del punto materiale è determinato se è conosciuta in ogni istante di tempo la sua posizione in un dato sistema di riferimento. Per esempio, se si è scelto un sistema di riferimento cartesiano, il moto del punto materiale sarà determinato se si conoscono le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

La traiettoria è il luogo geometrico dei punti occupati nei vari istanti di tempo dal punto in movimento, e costituisce una curva continua

MOTO TRIDIMENSIONALE (3-DIM)

Nel caso più generale 3-dim, cioè un p.m. che si muove nello SPAZIO, il sistema di riferimento sarà costituito da 3 assi cartesiani OXYZ.

3-dim



$P = (x,y,z)$

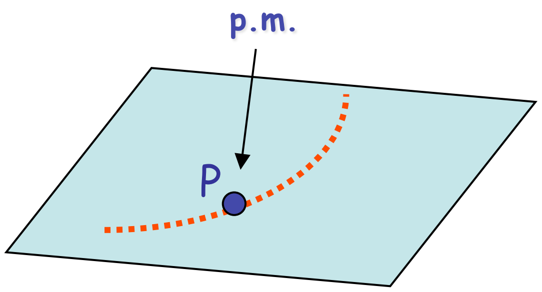
$\vec{r} = (x,y,z)$

Scelta un'unità di misura per le distanze.

La posizione del p.m. sarà data da una terna di numeri reali che rappresentano la distanza dall'origine (coordinate):

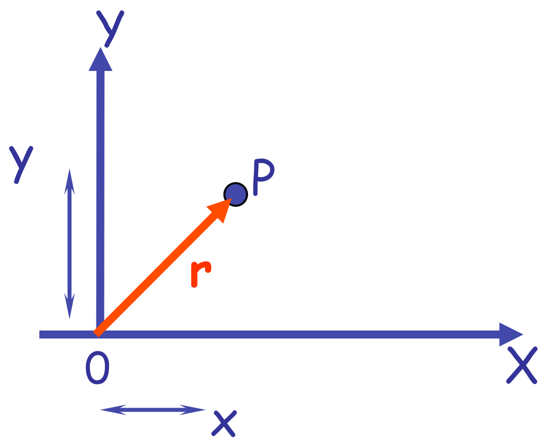
$P=(x, y, z)$ <u>oppure</u> mediante il vettore posizione $\vec{r}=(x,y,z)$

MOTO BIDIMENSIONALE (2-DIM)



p.m. vincolato a muoversi su un PIANO

Il sistema di rifermento può essere una coppia di assi coordinati: OXY

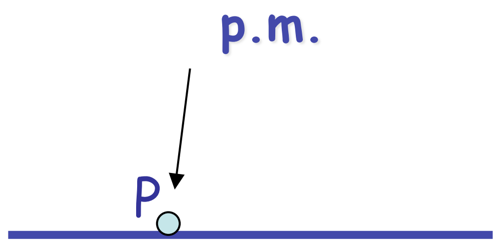


Scelta un'unità di misura per le distanze.

La posizione del p.m. sarà data da una coppia di numeri reali che rappresentano la distanza dall'origine (coordinate): P=(x,y)

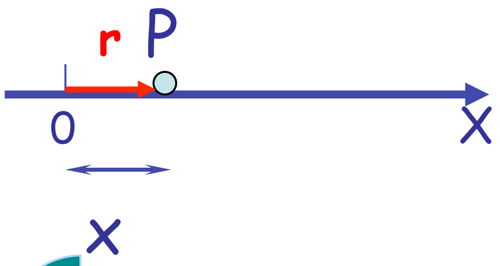
oppure mediante il vettore posizione $\vec{r}$

MOTO UNIDIMENSIONALE (1-DIM)



p.m. vincolato a muoversi lungo una retta

Il sistema di rifermento può essere un asse coordinato lungo la retta: OX



Scelta un'unità di misura per le distanze.

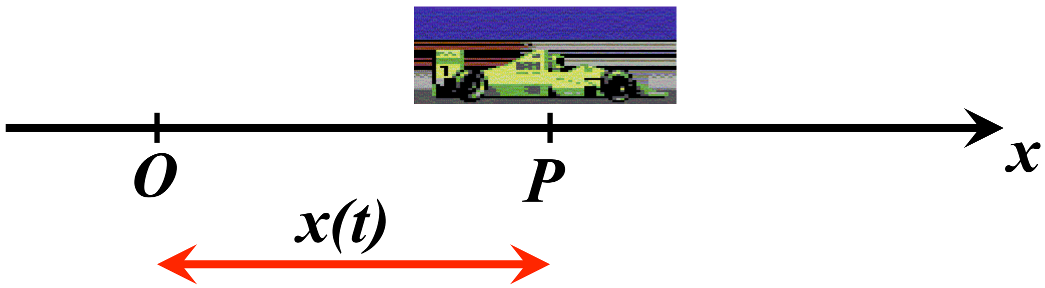
La posizione del p.m. sarà data da un numero reale che rappresenta la distanza dall'origine (coordinata).

x> 0 se il p.m. si trova a destra dell'origine

x< 0 se il p.m. si trova a sinistra dell'origine

Moto rettilineo (1-dim)

Si consideri un punto materiale che può muoversi lungo una linea retta, e si assuma come riferimento un asse x coincidente con la retta su cui è fissata un'origine O



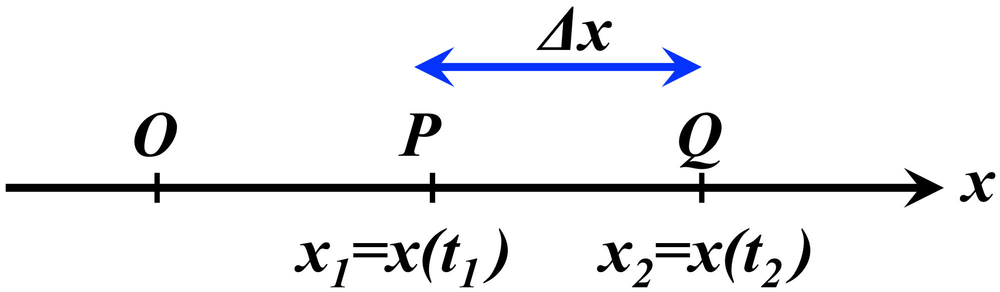
Descrivere il moto del punto materiale = conoscere come varia nel tempo la sua posizione x(t)

La funzione x(t) prende il nome di legge oraria del moto

Velocità media

***P* = posizione del punto materiale all'istante t_1**

***Q* = posizione del punto materiale all'istante $t_2=t_1+\Delta t$**



$\Delta x = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) \equiv$ ***spostamento del punto materiale nell'intervallo di tempo** Δt **tra** t_1 **e** t_2*

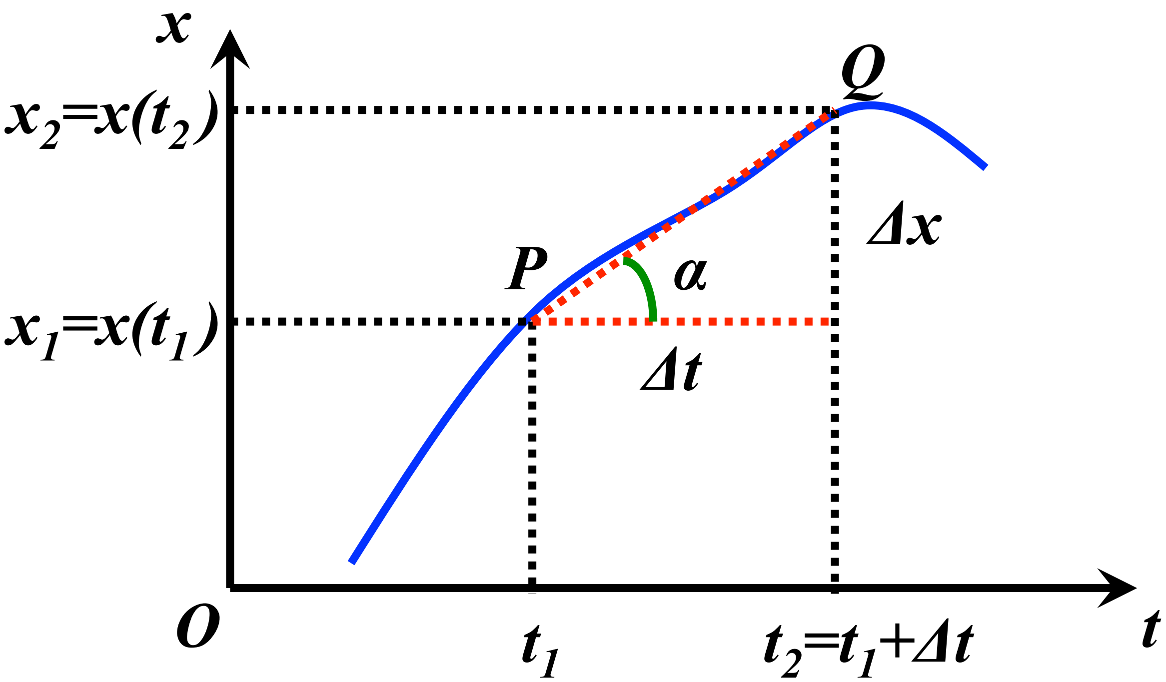
velocità media

$$\boxed{\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

La velocità media fornisce una indicazione complessiva su come varia la posizione del punto materiale nel tempo

Significato geometrico della velocità media

Riportiamo in un piano (t,x) le posizioni del punto materiale in funzione del tempo (diagramma orario)

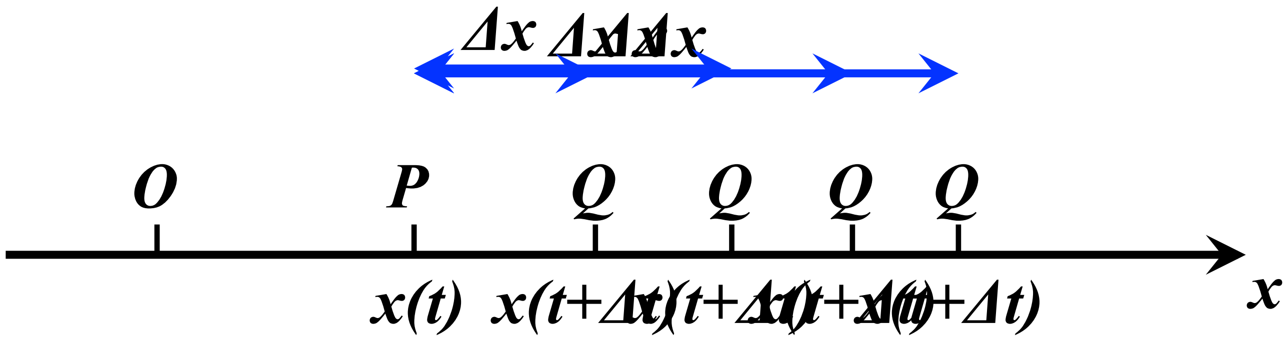


La velocità media $\bar{v}$ rappresenta la tangente dell'angolo α tra l'asse delle ascisse e la secante alla curva x(t) passante per i punti P e Q, cioè la pendenza della retta PQ

Velocità istantanea

La velocità istantanea fornisce una indicazione su come varia la posizione del punto materiale in un determinato istante di tempo

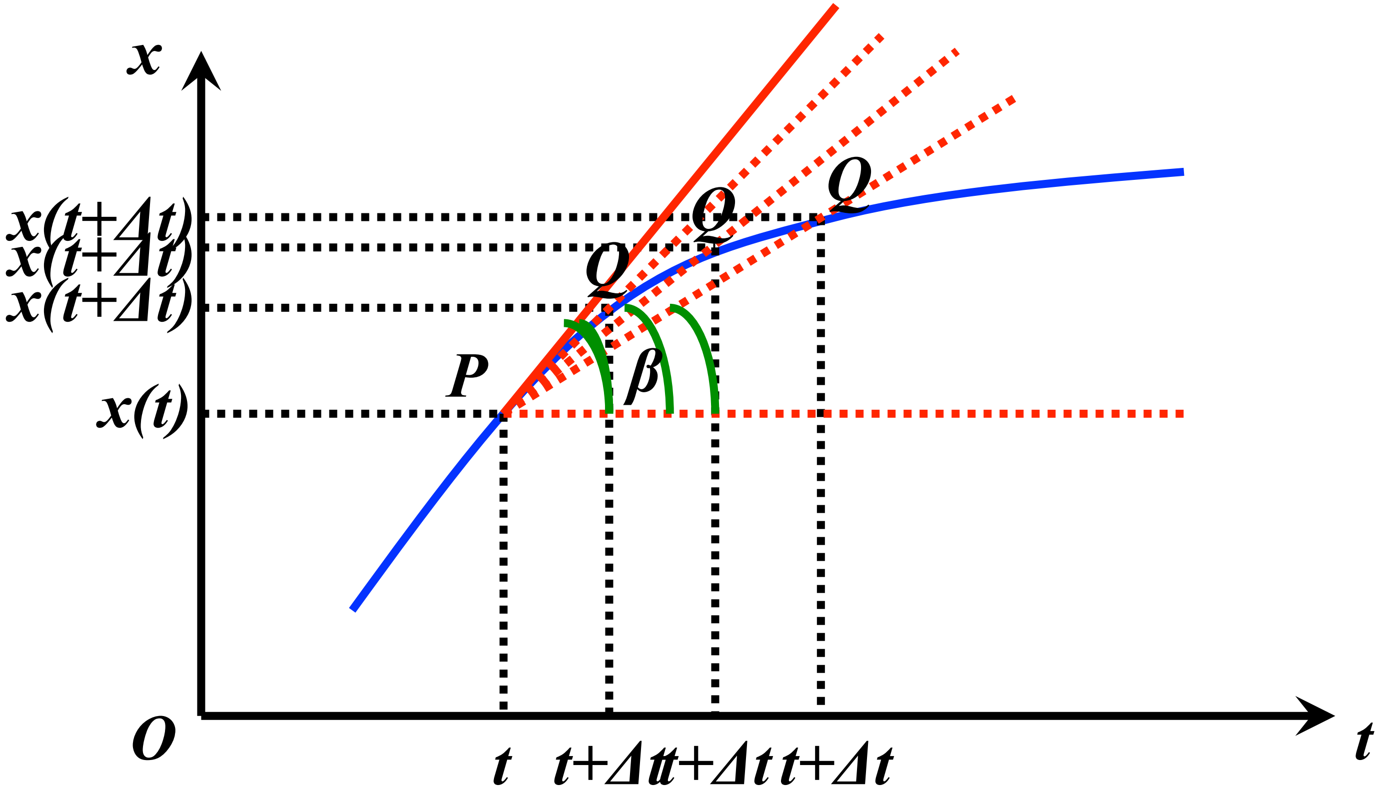
Essa viene definita come limite della velocità media per $\Delta t \to 0$



$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Significato geometrico della velocità istantanea

Riportiamo ancora una volta il diagramma orario del moto



La velocità istantanea v rappresenta la tangente dell'angolo β tra l'asse delle ascisse e la retta tangente alla curva x(t) nel punto P, cioè la pendenza della retta tangente in P al diagramma orario

Equazione dimensionale per la velocità

Ricordiamo le definizioni di velocità media e velocità istantanea:

$$\boxed{\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \qquad \boxed{v = \frac{dx}{dt}}$$

Sulla base di queste definizioni, si può ottenere l'equazione dimensionale per la velocità:

$$\boxed{[v] = [L][T^{-1}]}$$

- ***Nel sistema MKS la velocità si misura in metri al secondo (m/s)***
- ***Nel sistema CGS la velocità si misura in centimetri al secondo (cm/s)***

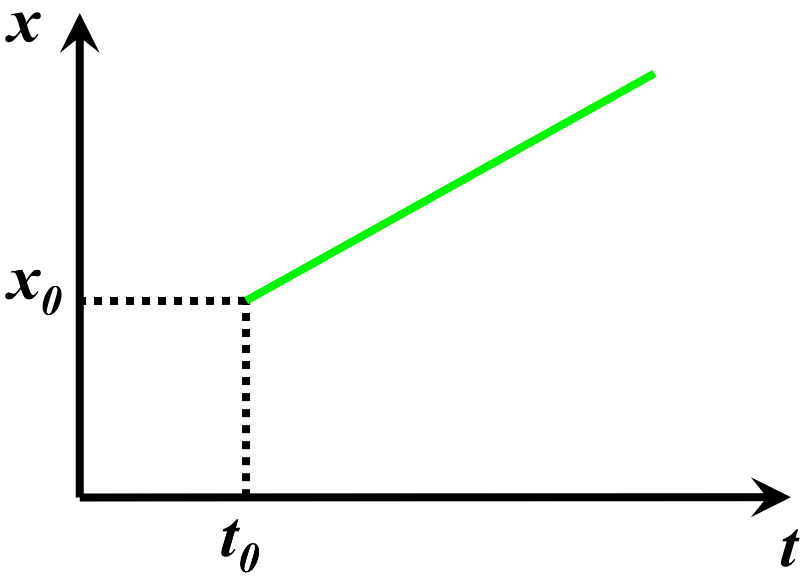
Moto rettilineo uniforme

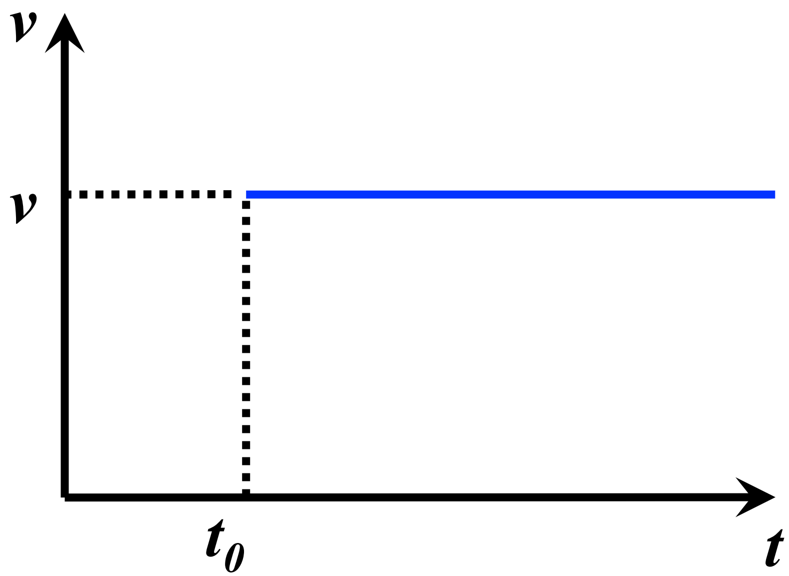
Nel moto rettilineo uniforme la velocità istantanea è costante:

$$\boxed{v(t) = \overline{v} = v \ (= costante)}$$

Si può dunque ricavare la legge oraria del moto:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v(t - t_0)}$$





Accelerazione

Siano $v_1=v(t_1)$ la velocità del punto materiale all'istante t_1 e $v_2=v(t_2)$ la velocità all'istante $t_2=t_1+\Delta t$. Analogamente a quanto fatto per la velocità media, si definisce l'accelerazione media:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

L'accelerazione media fornisce un'indicazione complessiva su come varia la velocità del punto materiale nel tempo

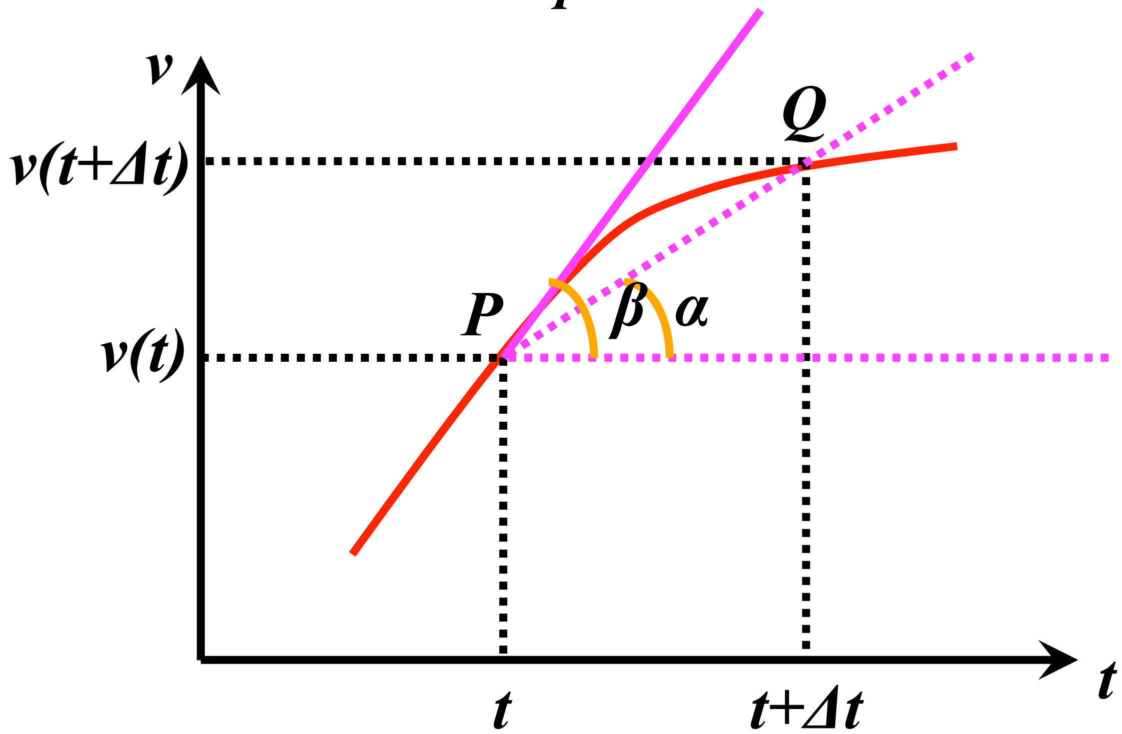
Accanto all'accelerazione media si definisce l'accelerazione istantanea:

$$\boxed{a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}}$$

L'accelerazione istantanea indica come varia la velocità del punto materiale in un determinato istante di tempo

Significato geometrico dell'accelerazione

Consideriamo un diagramma in cui riportiamo in ascissa il tempo ed in ordinata la velocità del punto materiale



- ***L'accelerazione media rappresenta la tangente dell'angolo α tra la secante al diagramma delle velocità in P e Q e l'asse t***
- ***L'accelerazione istantanea rappresenta la tangente dell'angolo β tra la tangente al diagramma delle velocità in P e l'asse t***

Equazione dimensionale per l'accelerazione

Partendo dalle definizioni di accelerazione media ed accelerazione istantanea:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

si può ottenere l'equazione dimensionale per l'accelerazione:

$$\boxed{[a] = [L][T^{-2}]}$$

- ***Nel sistema MKS l'accelerazione si misura in metri su secondi al quadrato (m/s^2)***
- ***Nel sistema CGS l'accelerazione si misura in centimetri su secondi al quadrato (cm/s^2)***

Moto uniformemente accelerato

Nel moto rettilineo uniformemente accelerato, l'accelerazione istantanea è costante:

$$\boxed{a(t) = \overline{a} = a\ (= costante)}$$

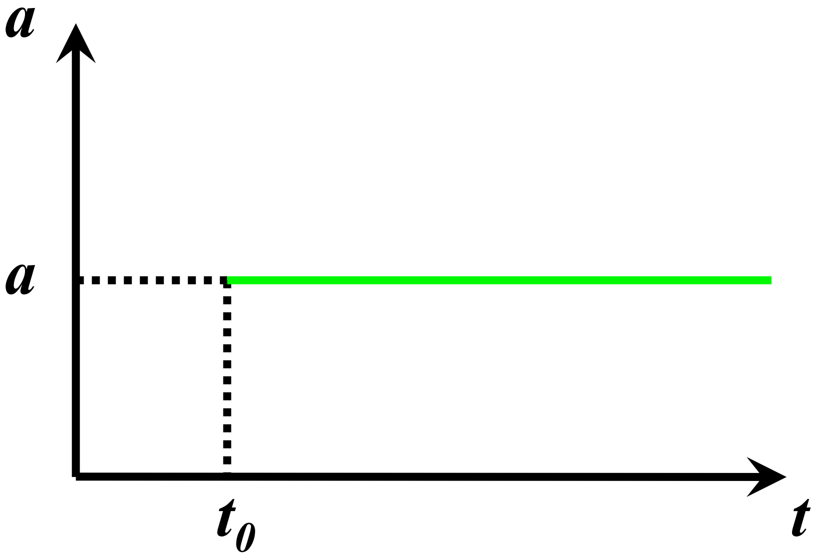
Si può ricavare l'andamento della velocità in funzione del tempo:

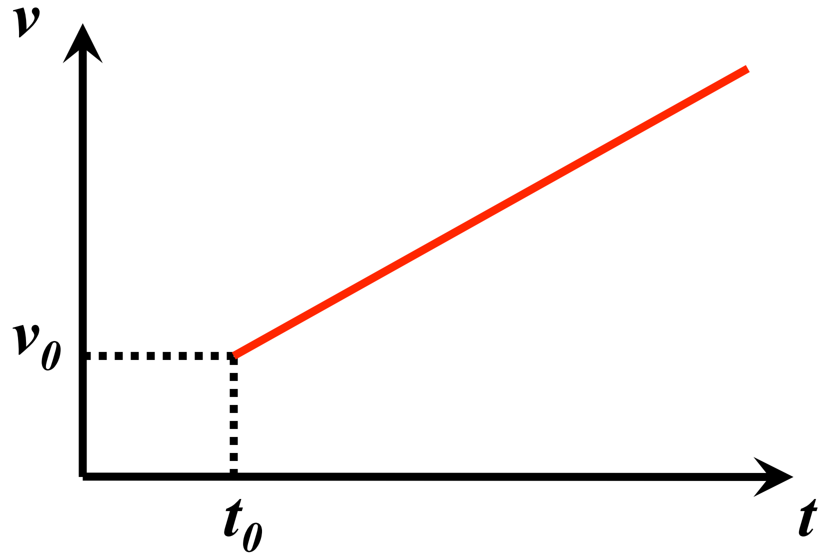
$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

ed infine la legge oraria:

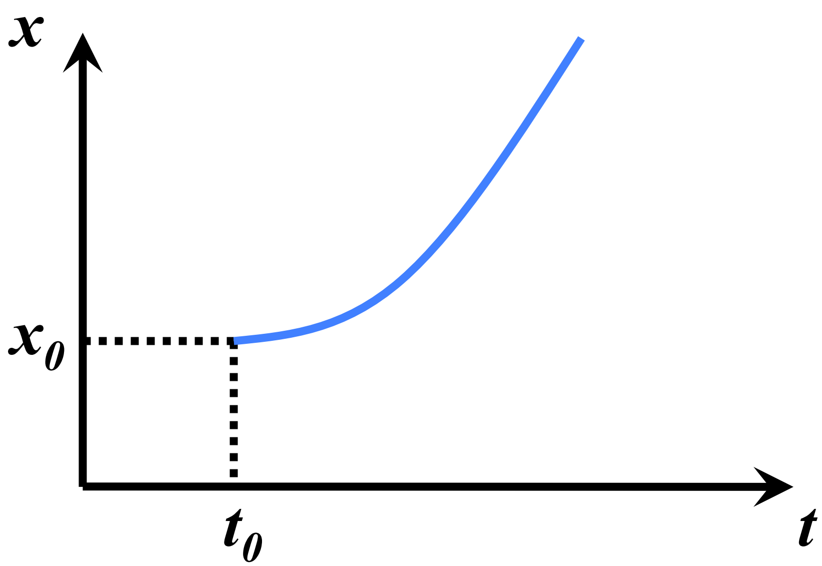
$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Grafici per il moto uniformemente accelerato





- ***La funzione a(t) è una costante***
- ***La funzione v(t) è una semiretta***
- ***La funzione x(t) è un arco di parabola***



materiale aggiuntivo

Moto uniformemente accelerato

Dimostrazione di: $$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Considerando la velacita' media $\bar{v}$ ***x(t) puo' essere espressa come***

$$x(t) = x_0 + \bar{v}(t - t_0)$$

Dal momento che la velocità varia linearmente nel tempo:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v(t) + v_0)$$ ***e poiche' nel moto unif. acc.:*** $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$

si ottiene:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v(t) + v_0)(t - t_0)$$

$$= x_0 + \frac{1}{2}\left(v_0 + a(t - t_0) + v_0\right)(t - t_0)$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Velocità in funzione della posizione nel moto uniformemente accelerato

Ricaviamo il tempo in funzione della velocità e sostituiamo nella legge oraria:

$$\boldsymbol{v = v_0 + a(t - t_0) \Rightarrow t - t_0 = \frac{v - v_0}{a}}$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$x - x_0 = v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{vv_0}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} - \frac{vv_0}{a} \Rightarrow$$

$$x - x_0 = \frac{2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

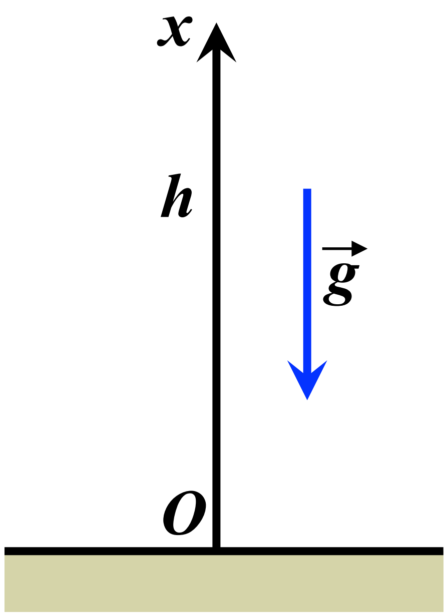
$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Caduta libera di un corpo (1)

Trascurando l'attrito dell'aria, un corpo lasciato libero di cadere in prossimità della superficie terrestre si muove verso il basso con accelerazione costante di modulo g=9,8 m/s^2

Assumiamo un sistema di riferimento con origine al suolo ed asse x rivolto verso l'alto. In questo riferimento: $a = -g$

Supponiamo che all'istante $t=0$ ($t_0=0$) il corpo sia lasciato libero di cadere da un'altezza iniziale h ($x_0=h$) con velocità iniziale nulla ($v_0=0$)



Equazioni del moto:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) &= -g t \end{aligned}}$$

Caduta libera di un corpo (2)

Il tempo di caduta si ricava ponendo x=0 nella legge oraria:

$$x = 0 \Rightarrow h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La velocità v_c con cui il corpo giunge al suolo si ricava sostituendo il valore di t_c nell'equazione della velocità:

$$v_c = v(t_c) = -g t_c = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{\frac{g^2 2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$$

Il segno meno indica che la velocità è diretta nel verso delle x negative (cioè verso il basso)