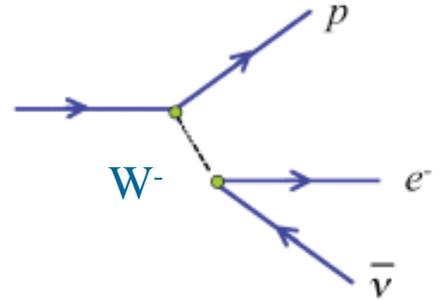


UNIFICAZIONE ELETTRODEBOLE:
Problema delle divergenze, modello di
Glashow

Andrea CIPOLLONE

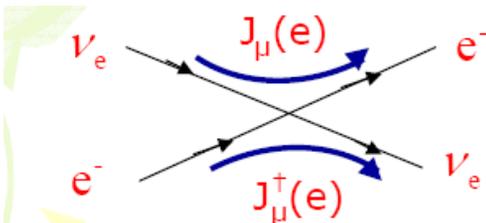
Introduzione

- Dallo studio del decadimento beta nel modulo scorso, si era introdotto un bosone carico W (molto massivo) come mediatore del processo a lato



- Feynman e Gell-Mann generalizzarono in seguito tale fatto supponendo che il W fosse in realtà il mediatore di qualsiasi processo d'interazione debole fino allora osservato

- La presenza di tale bosone permetteva di eliminare la divergenza tipiche delle interazioni puntiformi. Un esempio è lo scattering elastico



La cui sezione d'urto è (nel limite di neutrini molto energetici o s grande)

$$\sigma(e^- + \nu \rightarrow e^- + \nu) = \frac{G^2}{\pi} s \approx 2 \frac{G^2}{\pi} m_e E_\nu \quad (\text{nel laboratorio})$$

- Dalla conservazione della probabilità, sviluppo gli stati iniziali e finali in autofunzioni di m.a. e si ricava che la andamento limite di σ associata alla soloa componente l è

$$\sigma_l^{\text{MAX}} = \frac{16\pi\hbar^2}{s} (2l+1)$$

La prima sezione super la seconda ad un valore:

Nel caso sopra ($l=0$) $kx \ll 1$

$$x \approx 1/M_W \rightarrow 0$$

$$\sqrt{s^{\text{max}}} \approx 300 \text{Gev}$$

Limite di unitarietà

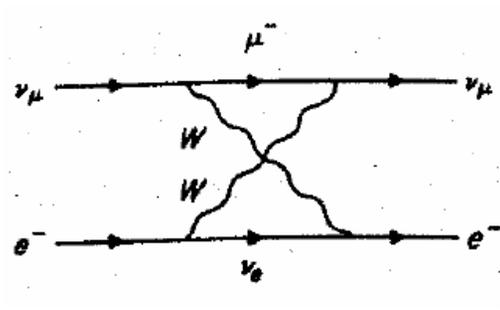
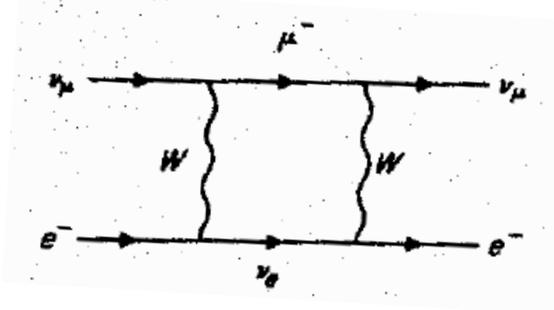
Divergenze

- L'introduzione dei W elimina le divergenze nel processo ν -e
- Tuttavia poiché il campo W è carico non permette di descrivere processi di interazione debole come

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

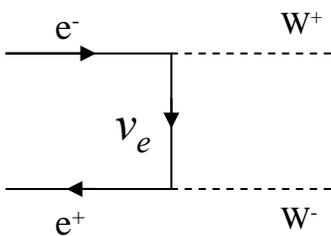
se non attraverso grafici del tipo



- Uno dei problemi più rilevanti era insito nel processo di creazione di coppie $W^+ W^-$:

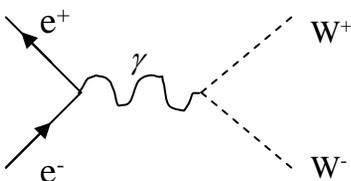
$$e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$$

possibile solo attraverso le interazioni debole ed elettromagnetica



(A)

$$\mathcal{M}_\nu = i \frac{g^2}{4M_W^2} [\bar{e}^+ \not{h}(1 - \gamma_5) e^- - 2m_e \bar{e}^+ e^-]$$



(B)

$$\mathcal{M}_\gamma = -i \frac{g^2 \sin^2 \theta_w}{2M_W^2} \bar{e}^+ (\not{k}_+ - \not{k}_-) e^-$$

Divergenze

La sezione d'urto del processo in (A) è anch'essa divergente in s

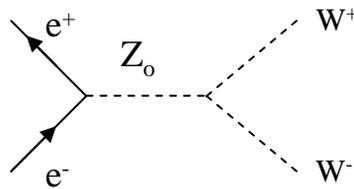
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \sum_{spin} |\mathcal{M}_\nu|^2 \rightarrow \frac{G^2}{32\pi^2} s \sin^2 \theta, \quad \sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{G^2}{12\pi} s.$$

Lo stesso andamento trovato precedentemente e avremo anche in questo caso una violazione dell'unitarietà per

$$\sqrt{s^{\max}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \approx 300 \text{ GeV}$$

E' facile capire che la divergenza di (A) *non può essere eliminata dal contributo dal diagramma (B)*, questa interazione è infatti del tipo puramente vettoriale mentre (A) è della forma V-A

Solo l'introduzione di un terzo bosone neutro Z^0 mediatore dell'interazione permette di "limare" questo andamento:



(C)

$$\mathcal{M}_Z = i \frac{g^2}{8M_W^2} \bar{e}^+ (\not{k}^+ - \not{k}^-) [2 \sin^2 \theta_w (1 + \gamma_5) + (2 \sin^2 \theta_w - 1)(1 - \gamma_5)] e^-$$

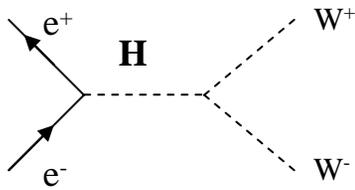
Divergenze

Vediamo che sommando le varie ampiezze:

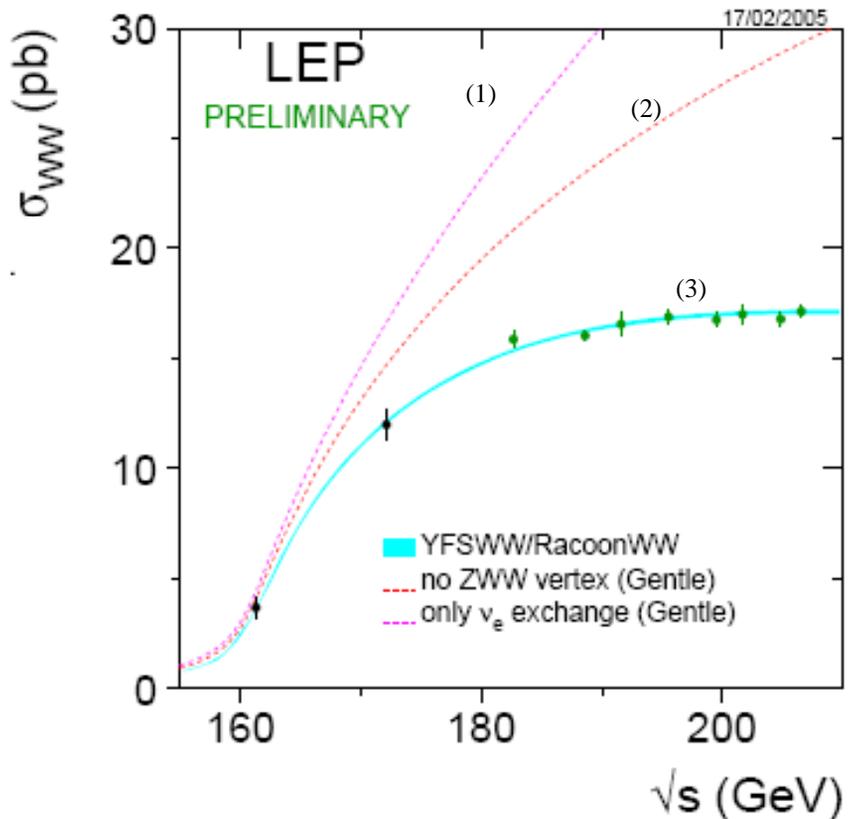
$$\mathcal{M}_\nu + \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z = -i \frac{g^2}{4M_W^2} m_e (\bar{e}^+ e^-)$$

Nel limite in cui si trascura m_e l'andamento in s del diagramma (A) è esattamente cancellato da (B) e (C). Con m_e diversa da zero la sezione d'urto è ancora divergente anche se l'andamento è $s^{1/2}$.

NOTA: l'introduzione dello Z porta ad una divergenza più debole, divergenza che sarebbe eliminata da un grafico del tipo:



$$\mathcal{M}_\nu + \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_H = 0.$$



(1) M_ν

(2) $M_\nu + M_\gamma$

(3) $M_\nu + M_\gamma + M_Z + M_H$

Correnti deboli

- Dall'analogia con la QED la lagrangiana di interazione debole è formata associando il campo W alle correnti cariche e il campo Z⁰ alla corrente neutra

$$L_{Debole} = g_W (J^{CC})^\alpha W_\alpha^+ + g_W (J^{CC+})^\alpha W_\alpha^- + (J^{NC})^\alpha Z_\alpha^0$$

- Dallo studio della *diffusione profondamente inelastica* si era associato allo scattering neutrino-quark una corrente carica puramente V-A come per i leptoni

$$J_\alpha^{CC} = \bar{v}(x) \gamma_\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} q(x)$$

in quanto la sua sezione d'urto era la stessa dello scattering

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$$

Un accoppiamento era quindi puramente levogiro

- Non c'è a priori nessuna ragione di associare la stessa struttura ad una corrente neutra (la corrente elettromagnetica per esempio lega anche fermioni destrorgiri), in generale quindi

$$J_\alpha^{NC} = \bar{f}(x) \gamma_\alpha \frac{(c_V^f - c_A^f \gamma^5)}{2} f$$

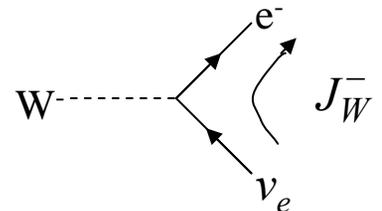
- Dove riscrivendo il campo in componenti destrorgiro e levogiro si ottengono le relazioni

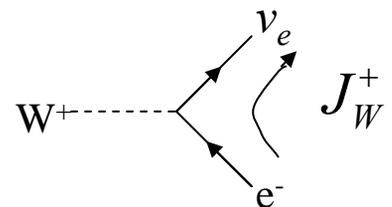
$$g_L = \frac{1}{2}(c_V^f + c_A^f)$$

$$g_R = \frac{1}{2}(c_V^f - c_A^f)$$

Verso una teoria unificata

- Quello che si è cercato di fare verso la fine degli anni 50 è di dare una espressione unificata delle interazioni elettrodeboli, considerando in un primo momento le correnti cariche

$$\mathbf{J}_\mu^{CC^-} = (\mathbf{J}_W^-)_\mu = \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu = \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L$$


$$\mathbf{J}_\mu^{CC^+} = (\mathbf{J}_W^+)_\mu = \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L$$


e introducendo i proiettori sugli stati chirali (autostati di γ_5)

$$a^{(\pm)} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2};$$

$$(a^{(\pm)})^2 = a^{(\pm)}; \quad a^{(+)} a^{(-)} = 0$$

Vediamo come le correnti diventano puramente vettoriali.
Posso riscrivere le correnti in maniera più compatta introducendo un *doppietto levogiro*

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \quad \text{e attraverso le matrici}$$

$$I^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verso una teoria unificata

- Posso scrivere le correnti come $\left(\mathbf{J}_{\overline{W}}^{\pm}\right)_{\mu} = \bar{e}_L \gamma_{\mu} I^{\pm} \nu_L$

che non sono altro che le correnti associate al operatore di decremento e incremento per un doppietto di isospin

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \quad I = \frac{1}{2} \quad I_3 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

con $I^{\pm} = \frac{1}{2}(I_1 \pm iI_2)$

con I_i matrici di pauli e generatori del gruppo $SU(2)_L$

- Supponiamo adesso che la lagrangiana di interazione sia *invariante sotto le rotazioni di isospin debole*, questo ci induce a introdurre una terza corrente associata a I_3

$$\mathbf{J}_{\mu}^3 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_L \gamma_{\mu} I^3 \psi_L = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \gamma_{\mu} \nu_L - \bar{e}_L \gamma_{\mu} e_L)$$

evidentemente neutra ma che accoppia unicamente componenti levogiro mentre le correnti neutra elettromagnetica accoppia tutti e due gli stati chirali

Verso una teoria unificata

- Riscriviamo adesso la corrente elettromagnetica attraverso l'operatore di carica

$$J_{e.m.}^{\mu} = \bar{e} \gamma^{\mu} e = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \mathbf{Q} \psi$$

Glashow nel '61 in analogia alla relazione di GellMann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$$

propose l'introduzione di una corrente di ipercarica debole

$$J_{\mathbf{Y}}^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \mathbf{Y} \psi$$

che permetteva di legare la corrente e.m. e le correnti deboli attraverso la stessa relazione

$$J_{e.m.}^{\mu} = J_3^{\mu} + \frac{1}{2} J_{\mathbf{Y}}^{\mu}$$

Il *modello di Glashow* prevedeva l'unificazione imponendo che le correnti elettrodeboli fossero le correnti di Noether associate ad uno stesso gruppo di simmetria:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

Verso una teoria unificata

In realtà questo è un gruppo di simmetria esatta solo nel limite in cui trascurassi la massa dell'elettrone

$$\begin{aligned} L_{libera} &= \bar{e}(i\partial - m_e)e + \bar{\nu}i\partial\nu = \bar{\psi}_L i\partial\psi_L + \bar{\psi}_R i\partial\psi_R - m_e \bar{e}e \\ &= \underbrace{\bar{\psi}i\partial\psi}_{L_{oo}} - \underbrace{m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)}_{L_m} \end{aligned}$$

La presenza della massa infatti rompe tale simmetria mescolando stati a chiralità diversa

Un altro fatto importante è che i generatori di tali gruppi commutano tra loro da cui l'ipercarica debole prende lo stesso valore all'interno di una stessa rappresentazione di SU(2)

$$J_\mu^Y = 2J_\mu^{e.m.} - 2J_\mu^3 = -2\bar{e}_R\gamma_\mu e_R - (\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L + \bar{e}_L\gamma_\mu e_L)$$

si vede chiaramente la scomposizione del doppietto leptonic in una somma diretta di 2 rappresentazioni diverse di SU(2)

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L \oplus (e)_R$$

Al singoletto è associato un $Y=-2$ al doppietto $Y=-1$

Verso una teoria unificata

Possiamo classificare le particelle che partecipano alle interazioni attraverso questi nuovi numeri quantici arrivando così alla tabella seguente

	I	I_3	Q	Y
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	-1
e_L^-, μ_L^-, τ_L^-	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
e_R^-, μ_R^-, τ_R^-	0	0	-1	-2
u_L, c_L, t_L	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{3}$
d'_L, s'_L, b'_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R	0	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$
d'_R, s'_R, b'_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$