

Standard Model

Nadia Drenska

Struttura generale

Vogliamo descrivere la teoria ElettroDebole partendo dalle interazioni tra le correnti di Isospin e le correnti di Ipercarica coi rispettivi campi da gauge.

Seguiremo questo schema generale:

- 1- modello di Glashow-Weinberg-Salam (GWS): come definire le correnti cariche e come identificare la corrente EM e la NC debole;
- 2- relazioni fondamentale tra i parametri predetti dello S.M.;
- 3- invarianza di gauge: vedremo come rendere la lagrangiana ElettroDebole invariante sotto trasformazioni di gauge locali.

Perché l'unificazione?

Abbiamo una relazione fondamentale che implica che la terza componente della corrente di Isospin debole e la corrente ElettroMagnetica sono legate tra loro.

$$j_{\mu}^{em} = j_{\mu}^3 + \frac{1}{2} j_{\mu}^Y$$

Il gruppo di simmetria dell'Isospin è SU(2): lo stesso dello Spin, quindi le caratteristiche di tale simmetria ci sono già note.

I generatori della simmetria sono le matrici di Pauli, che indicheremo con (I_1, I_2, I_3) e costituiscono la base per la costruzione dei vettori.

Il gruppo di simmetria dell'Ipercarica è invece U(1). Come nel caso del fotone abbiamo un solo generatore .

Sappiamo inoltre che il numero di generatori di una simmetria è esattamente uguale al numero di bosoni di gauge della stessa simmetria.

Nello S.M. la simmetria necessaria e sufficiente è il gruppo SU(2)xU(1) quindi ci aspettiamo 4 bosoni di gauge.

GWS: interazione ElettroDebole

Il termine d'interazione che tiene conto delle tre correnti di Isospin e della corrente di Ipercarica si può scrivere come

$$-i(g\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu)$$

in analogia alla QED dove abbiamo la sola corrente ElettroMagnetica

$$-i(ej_\mu^{em} A^\mu)$$

Le quantità introdotte sono:

- le costanti d'accoppiamento $g, \frac{g'}{2}$
- le correnti $\mathbf{j}_\mu = (j_\mu^1, j_\mu^2, j_\mu^3), j_\mu^Y$
- i campi di gauge \mathbf{W}^μ, B^μ

Correnti cariche e correnti neutre

Definiamo le correnti cariche come

$$j_{\mu}^{\pm} = j_{\mu}^1 \pm ij_{\mu}^2$$

e in modo analogo per i campi carichi di gauge abbiamo

$$W_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\mu}^1 \mp iW_{\mu}^2)$$

La componente neutra dell' interazione si riscrive come

$$-i(gj_{\mu}^3 W^{\mu 3} + \frac{g'}{2} j_{\mu}^Y B^{\mu})$$

Abbiamo quindi due campi neutri e sappiamo che un' opportuna C.L. di essi deve restituire il campo del fotone dell' interazione Elettromagnetica.

Con un' opportuna rotazione dobbiamo costruire i veri campi neutri

$$(W^{\mu 3}, B^{\mu}) \longrightarrow (Z^{\mu 3}, A^{\mu})$$

Angolo di mixing

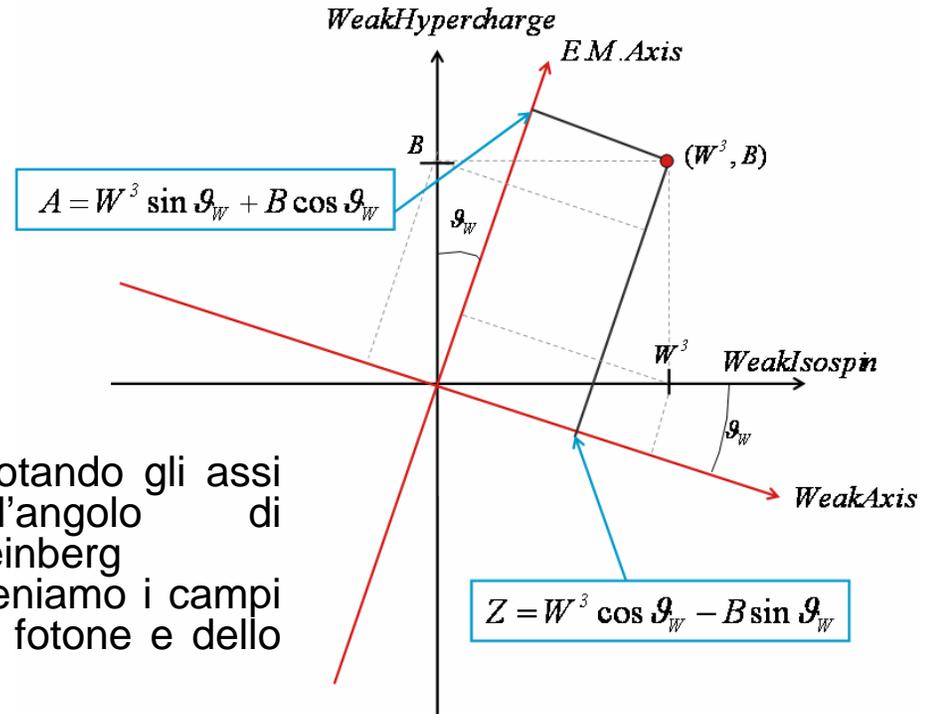
Introduciamo quindi l'angolo di mixing

$$\begin{cases} W_\mu^3 = A_\mu \sin \vartheta_W + Z_\mu \cos \vartheta_W \\ B_\mu = A_\mu \cos \vartheta_W - Z_\mu \sin \vartheta_W \end{cases}$$



$$-i(gj_\mu^3 W^{\mu 3} + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu)$$

Ruotando gli assi dell'angolo di Weinberg otteniamo i campi del fotone e dello Z



Queste inserite nell'espressione della componente neutra iniziale ci danno le vere correnti e i veri campi



Le vere correnti

$$-i(g \sin \vartheta_W j_\mu^3 + g' \cos \vartheta_W \frac{j_\mu^Y}{2}) A^\mu - i(g \cos \vartheta_W j_\mu^3 - g' \sin \vartheta_W \frac{j_\mu^Y}{2}) Z^\mu \leftarrow$$

Imponiamo che torni la fisica del fotone

$$\equiv -ie j_\mu^{em} A^\mu = -ie(j_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y) A^\mu$$

$$j_\mu^{em} = (j_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y)$$

$$g \sin \vartheta_W = g' \cos \vartheta_W = e$$

Relazione
fondamentale
tra i parametri
liberi

Imponiamo che torni la NC...

$$\sim j_\mu^{NC} Z^\mu$$

...e ne
determiniamo
l'espressione

$$j_\mu^{NC} = j_\mu^3 - j_\mu^{em} \sin^2 \vartheta_W$$

Gli accoppiamenti
suggeriscono bosone Z
massivo

Il contributo neutro risulta

$$-i(g j_\mu^3 W^{\mu 3} + \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu) = -ie(j_\mu^{em} A^\mu) - i \frac{g}{\cos \vartheta_W} (j_\mu^{NC} Z^\mu)$$

Costanti d'accoppiamento predette dallo S.M.

Possiamo esprimere la NC sia in termini delle costanti c_A , c_V sia in termini degli operatori I_3 , Q .

$$j_\mu^{NC}(f) = \bar{u}_f \gamma_\mu \frac{1}{2} (c_V^f - c_A^f \gamma^5) u_f$$
$$= \bar{u}_f \left[\frac{\gamma_\mu}{2} (1 - \gamma_5) \mathbf{I}_3 - \gamma_\mu \sin^2 \vartheta_W \mathbf{Q} \right] u_f$$

Il proiettore seleziona la componente left dello spinore

Dal confronto si ricavano gli accoppiamenti Assiali e Vettoriali

$$c_V^f = I_3^f - 2Q^f \sin^2 \vartheta_W$$
$$c_A^f = I_3^f$$

I_3^f e Q sono i valori della terza componente dell'Isospin e della Carica.

I sigoletti hanno accoppiamenti puramente vettoriali;

le particelle neutre sono di tipo V-A.

Accoppiamenti assiali e vettoriali

Le predizioni dello S.M. sugli accoppiamenti Assiali e Vettoriali di tutti i fermioni al bosone Z si possono leggere in tabella

$$c_V^f = I_3^f - 2Q^f \sin^2 \theta_W$$

$$c_A^f = I_3^f$$

Fermion f	I_3^f	Q^f	c_A^f	c_V^f
ν_e, ν_μ, ν_τ	$+\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_L^-, μ_L^-, τ_L^-	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$
u_L, c_L, t_L	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$
d_L', s_L', b_L'	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$
e_R^-, μ_R^-, τ_R^-	0	-1	0	$2 \sin^2 \theta_W$
u_R, c_R, t_R	0	$+\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$
d_R', s_R', b_R'	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$

Matrice di Massa

Per ora non abbiamo mai preso in considerazione la massa delle particelle in gioco, ma sappiamo che i bosone Z e W sono massivi, al contrario del fotone. La matrice di massa lega i valori delle masse

$$M = \begin{pmatrix} m^2 & m_{03}^2 \\ m_{03}^2 & m_0^2 \end{pmatrix}$$

matrice di massa nella base (W^3, B)

m è la massa di W_1, W_2, W_3

m_0 è associata al campo B

m_{03} ai termini misti

Ma come ottenere la massa dello Z?

Gli autovalori danno la massa dei campi di gauge: quindi un autovalore è necessariamente nullo, l'altro si ottiene dall'invarianza della traccia.

Gli autovettori danno le espressioni dei campi di gauge e abbiamo

$$\begin{cases} Z = W^3 \cos \mathcal{G}_W - B \sin \mathcal{G}_W \\ A = W^3 \sin \mathcal{G}_W + B \cos \mathcal{G}_W \end{cases}$$

Imponiamo che il fotone abbia massa nulla e ricaviamo la massa dello Z

Dalla richiesta di autovalore nullo segue $\det M = 0 \Rightarrow (m_{03}^2)^2 = m^2 m_0^2$

Matrice di massa

Calcoliamo l'autovalore non nullo.

Stiamo diagonalizzando la matrice di massa e ne dobbiamo estrarre gli elementi sulla diagonale. Tenendo in conto che un elemento è nullo, la massa dello Z sarà semplicemente:

$$m_Z^2 = m^2 + m_0^2 = (\cos \mathcal{G}, -\sin \mathcal{G}) M \begin{pmatrix} \cos \mathcal{G} \\ -\sin \mathcal{G} \end{pmatrix} = (m \cos \mathcal{G} - m_0 \sin \mathcal{G})^2$$

Lo Z è più massivo del W e vale la relazione

$$m_Z^2 = \frac{m_W^2}{\cos^2 \mathcal{G}}$$

Possiamo anche controllare che interazioni di NC e interazioni EM hanno scale di intensità determinate dalla stessa costante G_F .

Questo permette la cancellazione delle divergenze nella produzione

$$e^+ e^- \rightarrow W^+ W^-$$

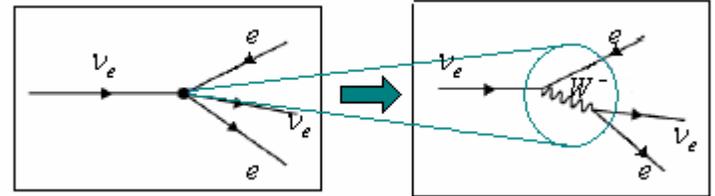
Scala delle interazioni

L'ampiezza di processi ad un vertice con flusso di CC porta un fattore

$$\sim \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

In realtà il processo è a due vertici con scambio di un bosone carico

$$\sim \frac{g^2}{8m_W^2}$$



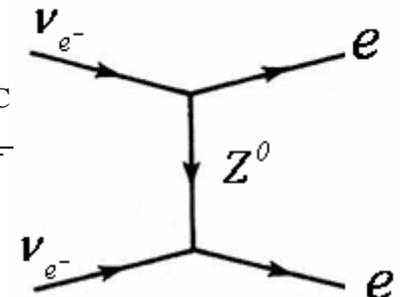
La teoria di Fermi funziona secondo l'uguaglianza

$$\Rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{e^2}{8\sin^2 \mathcal{G}m_W^2}$$

Per le NC, considerando gli accoppiamenti ai vertici precedentemente sottolineati, possiamo scrivere

$$\sim \frac{g^2}{8\cos^2 \mathcal{G}m_Z^2} \equiv \frac{G^{NC}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos^2 \mathcal{G}m_Z^2 = m_W^2$$



Ricordando la relazione tra le masse dei bosoni carichi risulta vero

$$G^{NC} = G_F$$

Invarianza di gauge

Abbiamo iniziato scrivendo i termini di interazione correnti-campi di gauge.

Dalla QED sappiamo che i campi di gauge giocano un ruolo fondamentale nell'invarianza della lagrangiana:

- entrano nella derivata covariante
- hanno una legge di trasformazione determinata dal gruppo di simmetria

Iniziamo considerando il gruppo SU(2) e quindi la teoria di Yang-Mills

Vediamo cosa succede richiedendo l'invarianza di gauge locale per due campi fermionici a massa nulla

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

La L sarà la somma di due termini uguali e può essere scritta in modo compatto

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Assumiamo che i campi trasformano come un doppietto sotto la simmetria SU(2) di Isospin

$$\Psi \rightarrow U\Psi = e^{-igA(x)\cdot I}\Psi$$

E richiediamo che valga l'invarianza sotto tale rotazione

Yang-Mills

Per trasformazioni infinitesime vale lo sviluppo

Generatori della simmetria SU(2) (matrici di Pauli)

$$\underline{\underline{[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k}}$$

Vettore d'Isospin $I = (I_1, I_2, I_3)$

$$\Psi(x) \rightarrow [1 - ig\mathcal{A}(x) \cdot \mathbf{I}] \Psi(x)$$

Vettore arbitrario dello sp. Isospin

U(1)

SU(2)

In QED abbiamo la sostituzione della derivata con la derivata covariante

Ora dobbiamo operare in modo del tutto analogo ma abbiamo a che fare con una simmetria non Abeliana e il numero di generatori è salito a 3.

$$\Psi(x) \rightarrow [1 + iq\mathcal{A}(x)] \Psi(x)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{I} \cdot \mathbf{W}_\mu$$

$$(D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi)$$

$$A \rightarrow A - \partial\mathcal{A}(x)$$

$$W_i \rightarrow W_i + \partial\mathcal{A}_i + g\epsilon_{ijk} \mathcal{A}_j W_k$$

Invarianza di gauge locale sotto SU(2) e U(1)

La teoria sviluppata da Y&M era basata sulla simmetria di Isospin Forte (n,p).

Ma l'algebra sviluppata si applica senza variazioni alla simmetria di Isospin Debole, essendo dello stesso gruppo SU(2).

L'altra simmetria necessaria nella teoria di GWS è U(1), ma di questa sappiamo tutto grazie alla QED.

Le particelle in gioco sono organizzate in doppietti e singoletti e trasformano secondo lo schema

$$\left\{ \begin{array}{l} SU(2) \rightarrow \text{doppietto} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \dots \\ \cancel{SU(2)} \rightarrow \text{singoletto} (e)_R, \left\{ \begin{array}{l} (u)_R \\ (d)_R \end{array} \right\}, \dots \\ U(1) \rightarrow_{R,L} \end{array} \right.$$

Le particelle left-handed trasformano in modo non triviale sia sotto la simmetria di Isospin, sia sotto l'ipercarica.

Le particelle right-handed sono stati di singoletto sotto la simmetria di SU(2).

$SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

1. Le trasformazioni infinitesime dei campi fermionici sotto le quali vogliamo invarianza di gauge locale sono

$$\underline{SU(2)_L}$$

$$\Psi_L(x) \rightarrow (1 - ig\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{I})\Psi_L(x)$$

$$\Psi_R(x) \rightarrow \Psi_R(x)$$

$$\underline{U(1)_Y}$$

$$\Psi_L(x) \rightarrow (1 - i\frac{g'}{2}\lambda(x) \cdot Y)\Psi_L(x)$$

$$\Psi_R(x) \rightarrow (1 - i\frac{g'}{2}\lambda(x) \cdot Y)\Psi_R(x)$$

2. La derivata covariante che sostituisce la derivata ordinaria è

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{I} \cdot \mathbf{W}_\mu + i\frac{g'}{2}YB_\mu$$

3. Richiedendo che la derivata si trasformi come il campo della particella otteniamo le trasformazioni dei campi di gauge

$$W_i \rightarrow W_i + \partial A_i(x) + g\varepsilon_{ijk}A_j(x)W_k$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu$$

$$W_i \rightarrow W_i$$

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$$

Lagrangiana ElettroDebole

Siamo ora in grado di scrivere la L ElettroDebole, invariante per trasformazioni di gauge locali per costruzione

Att! Dobbiamo aggiungere i termini cinetici dei bosoni di gauge.

Nel caso di campo scalare B abbiamo il tensore a due indici del tutto analogo alla QED

$$B^{\mu\nu} = \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu$$

Ma il campo di gauge W nasce da una simmetria non abeliana e quindi dobbiamo tener conto della relazioni tra i generatori di $SU(2)$. Si verifica facilmente che vale

$$W^{\mu\nu} = \partial^\nu W^\mu - \partial^\mu W^\nu - g W^\mu \wedge W^\nu$$

-----> Termine di auto interazione dei campi W

$$L = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - ig\mathbf{I} \cdot \mathbf{W}_\mu - i\frac{g'}{2} YB_\mu \right) \Psi_L(x) + \\ + \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \left(i\partial_\mu - i\frac{g'}{2} YB_\mu \right) \Psi_R +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} + \\ -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \end{array} \right.$$

La massa rompe la simmetria

E' vero che abbiamo visto la matrice di massa, ma bisogna ricordare che la teoria di GWS prevede massa nulla per i fermioni e per i bosoni di gauge.

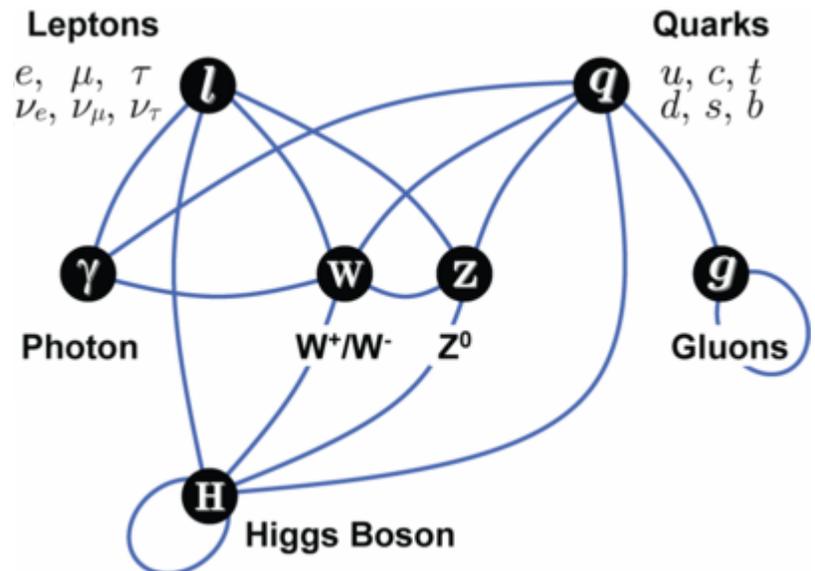
Possiamo fare il conto dando massa al campo fermionico e convincerci che la simmetria SU(2) viene rotta.

$$\begin{aligned} m\bar{\Psi}\Psi &= m\bar{\Psi}(P_L + P_R)\Psi = \\ &= m\bar{\Psi}P_L P_L\Psi + m\bar{\Psi}P_R P_R\Psi = \\ &= m(\bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R) \end{aligned}$$

Ma fermioni left-handed e right-handed sono classificati in doppietti e singoletti di SU(2)!!

E' rimasto a lungo misterioso come si potesse dare massa alle particelle senza rompere la simmetria costruita.

La soluzione del problema si trova nel fenomeno di Higgs.



Bibliografia

- Burcham and Jobes: Nuclear and Particle Physics (cap. 13)
- Maiani: Teorie di gauge (cap. 4)