Prima prova in itinere

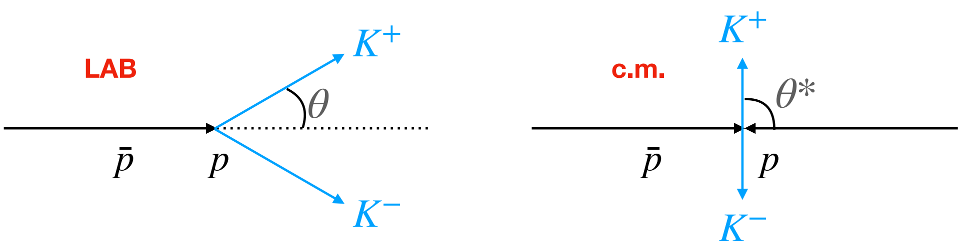
Fisica Nucleare e Subnucleare I

28 aprile 2021

A fine testo è presente una tabella riepilogativa con i dati per la risoluzione degli esercizi. Lo svolgimento di ciascun punto deve essere completo e includere i vari passaggi logici seguiti per ottenere il risultato numerico.

Esercizio 1

Un fascio di antiprotoni di impulso $p = 1\,\mathrm{GeV/c}$ viene fatto collidere su un bersaglio fisso. L'annichilazione degli antiprotoni con i protoni del bersaglio produce delle coppie di kaoni K^+, K^- (particelle cariche di massa riportata in tabella). L'antiprotone è l'antiparticella del protone, con stessa massa. Si assuma che i kaoni vengano prodotti – nel sistema del centro di massa – ad un angolo di $\pi/2$ rispetto alla direzione del fascio, come in figura.



1. Si determini, nel sistema di riferimento del laboratorio, l'energia dei K e l'angolo di emissione rispetto alla direzione del fascio incidente di antiprotoni.
2. Se i K attraversano un rivelatore a ionizzazione riempito di argon liquido e spesso 1 cm, qual è il numero di coppie elettrone-ione rivelate in media, se l'efficienza di produzione di una coppia è $\varepsilon_c = 20\%$ e l'efficienza di raccolta delle coppie del rivelatore è $\varepsilon_r = 30\%$?
3. I mesoni $K^\pm$ sono particelle instabili che decadono, con una vita media riportata in tabella. Quale deve essere la lunghezza di un ipotetico rivelatore per i $K^\pm$, tale che il 99% dei decadimenti dei kaoni prodotti al punto 1 sia contenuto nel rivelatore stesso?

Soluzione dell'esercizio 1

1. Se indichiamo con 1, 2 l'antiprotone del fascio incidente e il protone fermo sul bersaglio fisso, rispettivamente, la massa invariante del sistema, $\sqrt{s}$, è:

$$\begin{aligned}\sqrt{s} = &\sqrt{(E_1+E_2)^2 - |\vec{p}_1+\vec{p}_2|^2} = \sqrt{(E_1+m_p)^2 - |\vec{p}_1|^2} \\ = &\sqrt{E_1^2 + m_p^2 + 2E_1 m_p - p_p^2} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_1 m_p}\end{aligned}$$

usando (con $c = 1$) $p_1 = p_p = 1\,\mathrm{GeV}$ e $E_1 = \sqrt{p_p + m_p^2} = 1.37\,\mathrm{GeV}$ si ottiene:

$$\sqrt{s} = 2.08\,\mathrm{GeV}$$

Lo stato finale è di due particelle di uguale massa ($m_K = 0.49\,\mathrm{GeV}$), quindi l'energia dei mesoni K è equipartita nel centro di massa:

$$E^*_{K_1} = E^*_{K_1} \equiv E^*_K = \sqrt{s}/2 = 1.04\,\mathrm{GeV}$$

e quindi l'impulso è:

$$p^*_K = \sqrt{{E^*_K}^2 - m_K^2} = \sqrt{1.04^2 - 0.49^2}\ \mathrm{GeV} = 0.92\,\mathrm{GeV}$$

Poiché i due K vengono prodotti a $\theta^* = \pi/2$ nel centro di massa, il loro impulso nel centro di massa è completamente trasverso, e quindi:

$$\begin{cases} p_T^* = p_K^* = 0.92\,\text{GeV} \\ p_L^* = 0 \end{cases}$$

e quindi, applicando le trasformazioni di Lorentz, la componente trasversa al moto non cambia, mentre cambia quella longitudinale:

$$\begin{cases} p_T^{LAB} = p_T^* = 0.92\,\text{GeV} \\ p_L^{LAB} = \gamma p_L^* + \beta\gamma E_K^* = \beta\gamma E_K^* \end{cases}$$

basta ora calcolare il boost del centro di massa: $(\beta\gamma)_{c.m.}$:

$$(\beta\gamma)_{c.m.} = \frac{p_p}{\sqrt{s}} = \frac{1\,\text{GeV}}{2.08\,\text{GeV}} = 0.48$$

e quindi l'impulso dei K nel sistema di riferimento nel laboratorio è:

$$p_L^{LAB} = 0.48 \cdot 1.04\,\text{GeV} = 0.50\,\text{GeV}$$

Quindi l'impulso di emissione dei K è: $p_K = \sqrt{p_T^2 + p_L^2} = 1.047\,\text{GeV}$, da cui si ricava:

$$E_K = \sqrt{p_K^2 + m_K^2} = 1.16\,\text{GeV}$$

L'angolo di emissione dei K, rispetto alla direzione del fascio incidente di antiprotoni, nel sistema del laboratorio, è:

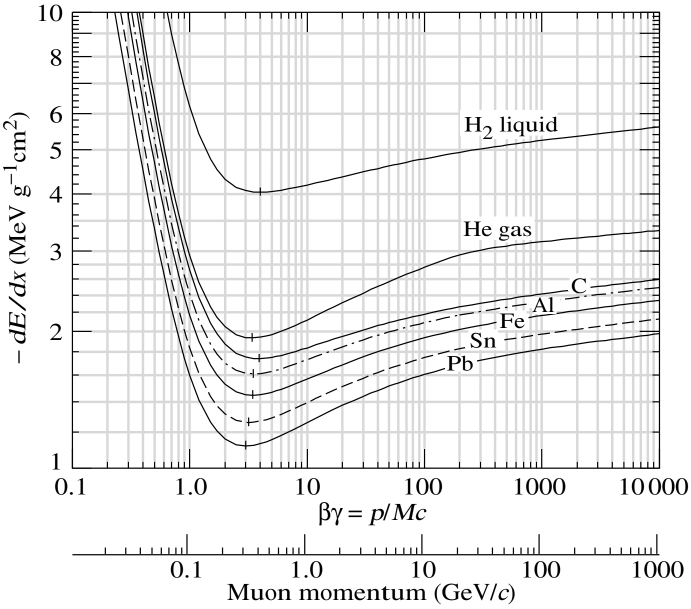
$$\theta = \arctan\left(\frac{p_T}{p_L}\right) = 61.5^\circ$$

2. Per capire in quale regime di perdita di energia per ionizzazione del mezzo da parte dei $K^\pm$ siamo, serve sapere il $(\beta\gamma)_K$ nel sistema di riferimento del laboratorio, quindi:

$$(\beta\gamma)_K^{LAB} = \frac{p_K^{LAB}}{m_K} = \frac{1.05\,\text{GeV}}{0.49\,\text{GeV}} = 2.1$$

Per questo valore (vedi figura) siamo vicini al minimo della perdita di energia per ionizzazione (*m.i.p.*), quindi possiamo approssimare $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ a una costante, come in figura nei pressi del minimo:

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{ion}} \approx 2\,\frac{\text{MeV}}{\text{g}}\text{cm}^2$$



da cui calcoliamo la perdita di energia integrata nel percorrere una profondità d di Ar liquido:

$$\Delta E = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{ion}} \cdot \rho \cdot d = 2\,\frac{\text{MeV}}{\text{g}}\text{cm}^2 \cdot 1.4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1\,\text{cm} = 2.8\,\text{MeV}$$

Con questo e il potenziale di ionizzazione si ottiene il numero di coppie elettrone - ione positivo rilasciate nel mezzo, usando la stima dell'efficienza di emissione ε_c. Inoltre solo una frazione pari all'efficienza di raccolta, ε_r, viene osservata dal rivelatore, quindi:

$$\langle n(e^- I^+)\rangle_{\text{osservate}} = \frac{\Delta E}{I}\varepsilon_c\varepsilon_r = \frac{2.8\times 10^6\,\text{eV}}{25\,\text{eV}} \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 6700$$

questo rappresenta il numero di coppie raccolte *in media* al passaggio di un singolo $K^\pm$.

Se invece si usa la perdita di energia di Bethe–Bloch,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx 0.307\,\text{MeV/gcm}^2 \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \frac{Z}{A}\left(\ln\!\left(\frac{2m_e c^2(\beta\gamma)^2}{\langle I\rangle}\right) - \beta^2\right) \approx 1.57\,\text{MeV/gcm}^2,$$

e si ottiene $\Delta E = 2.2\,\text{MeV}$, corrispondenti a 5280 coppie.

3. Per calcolare la lunghezza del rivelatore serve conoscere il tempo T necessario affinché il 99% dei K decada. La legge temporale del decadimento radioattivo è:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau_K}$$

che rappresenta il numero dei K che sopravvivono al tempo t, partendo da N_0 mesoni K al tempo $t = 0$. Il tempo T quindi si ricava come:

$$\left.\frac{N(t)}{N_0}\right|_{t=T} = 1 - 0.99 \Rightarrow T = -\tau_K \ln(0.01) = 5.71\times 10^{-8}\,\text{s}.$$

Questo è il tempo nel sistema di riferimento del K in volo, quindi per conoscere la lunghezza del rivelatore basta moltiplicare per il fattore di Lorentz:

$$L = \beta\gamma c T = \frac{p_K}{m_K} c T = 2.1 \cdot 3\times 10^8\,\text{m/s} \cdot 5.71\times 10^{-8}\,\text{s} = 36\,\text{m}$$

Esercizio 2

IceCube è un osservatorio di neutrini composto da una serie di rivelatori immersi in un volume di $1\,\text{km}^3$ di ghiaccio dell'Antartide. IceCube ha recentemente registrato un evento straordinario, presumibilmente dovuto all'interazione di un anti-neutrino elettronico $\overline{\nu}_e$, prodotto da sorgenti astrofisiche, con un elettrone del ghiaccio. La reazione osservata è al picco della risonanza W ("picco di Glashow"), corrispondente al processo

$$\overline{\nu}_e + e^- \to W,$$

dove la massa del bosone W è riportata in tabella.

1. Considerando l'elettrone a riposo nel ghiaccio dell'Antardide, qual è l'energia iniziale dell'anti-neutrino necessaria perché questa reazione avvenga?
2. La sezione d'urto del processo si può esprimere, tramite una funzione di Breit-Wigner, in funzione dell'energia nel centro di massa della reazione, $\sqrt{s}$:

$$\sigma = 24\pi(\hbar c)^2\Gamma_W^2 BR(W^- \to \overline{\nu}_e + e^-)\frac{s/M_W^2}{(s - M_W^2)^2 + \Gamma_W^2 M_W^2},$$

dove la larghezza di decadimento Γ_W e il branching ratio $BR(W^- \to \overline{\nu}_e + e^-)$ sono riportati in tabella. Assumendo che l'energia dell'anti-neutrino sia quella calcolata al punto precedente, si calcoli il flusso di anti-neutrini deducibile a partire dall'osservazione di questo singolo evento dopo 4.6 anni di presa dati.

Soluzione dell'esercizio 2

1. La massa invariante dello stato finale è:

$$\sqrt{s}^{\,\text{stato finale}} = M_W c^2 + K_W^*$$

L'energia minima per cui la reazione avvenga è quella per cui l'energia cinetica della particella W prodotta è nulla ($K_W^* = 0$). La massa invariante dello stato iniziale, per un neutrino di quadrimpulso $(E_\nu, \vec{p_\nu})$, è:

$$\begin{aligned}\sqrt{s}^{\text{stato iniziale}} &= \sqrt{(E_\nu + m_e c^2)^2 - |\vec{p_\nu}|^2 c^2} \\ &= \sqrt{E_\nu^2 + m_e^2 c^4 + 2 m_e E_\nu c^2 - E_\nu^2} \\ &= \sqrt{m_e^2 c^4 + 2 m_e E_\nu c^2}\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato la massa approssimativamente nulla del neutrino. Uguagliando le masse invarianti di stato iniziale e finale ed elevando al quadrato, si ottiene l'energia di soglia necessaria alla produzione del W:

$$\begin{aligned}m_W^2 c^4 &= m_e^2 c^4 + 2 m_e E_\nu^{\min} c^2 \\ \Rightarrow E_\nu^{\min} &= \frac{m_W^2 - m_e^2}{2 m_e} c^2 \approx \frac{m_W^2}{2 m_e} c^2\end{aligned}$$

Numericamente quindi:

$$E_\nu^{\min} \approx \frac{(80\,380\,\mathrm{MeV/c^2})^2}{2 \cdot 0.511\,\mathrm{MeV/c^2}} \cdot c^2 = 6.32 \times 10^{15}\,\mathrm{eV} = 6.32\,\mathrm{PeV}$$

che è un'energia enorme per un neutrino da raggi cosmici, e per questo spiega la rarità attesa per eventi del genere.

2. Se siamo all'energia corrispondente al picco di Glashow, $s = M_W^2$, quindi la formula di Breit Wigner diventa:

$$\sigma = 24\pi(\hbar c)^2 BR(W^- \to \overline{\nu}_e + e^-) \frac{1}{M_W^2}$$

usando il *branching ratio* del canale $W^- \to \overline{\nu}_e + e^-$: BR=10.75% si trova, numericamente:

$$\begin{aligned}\sigma &= 24 \cdot 3.14 \cdot 3.89 \times 10^{-28}\,\mathrm{GeV^2 cm^2} \cdot 0.1075 \cdot \frac{1}{(80.38\,\mathrm{GeV})^2} = \\ &= 4.88 \times 10^{-31}\,\mathrm{cm^2} = 4.88 \times 10^{-31} \cdot 1 \times 10^{24}\,\mathrm{b} = 4.88 \times 10^5\,\mathrm{pb}\end{aligned}$$

Nell'interazione di un numero di neutrini incidenti sugli elettroni del ghiaccio nell'unità di tempo, $\frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}t}$, si producono un numero di W, nell'unità di tempo: $\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}t}$ pari a:

$$\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}t} = \sigma \frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}t} \cdot n_e \cdot d$$

dove n_e è il numero di elettroni nell'unità di volume di ghiaccio e d è la profondità del volume. Se vogliamo sapere il flusso (numero di neutrini incidenti nell'unità di superficie e di tempo):

$$\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}t} = \sigma \cdot \frac{\mathrm{d}N_\nu}{\mathrm{d}t} \frac{1}{S} S \cdot n_e \cdot d = \sigma \Phi n_e V$$

dove V è il volume del ghiaccio. Il numero di elettroni bersaglio per unità di volume è dato dal numero di atomi, moltiplicato per il numero di elettroni in un atomo di acqua (10):

$$n_e = 10 \frac{N_A}{A} \rho$$

Quindi il numero di particelle W prodotte in un anno è:

$$N_W = \Delta t \cdot \sigma \cdot \Phi \cdot 10 \frac{N_A}{A} \rho \cdot V$$

Conoscendo il numero di conteggi ($N_W = 1$) in 4.6 anni ($\Delta t = 1.45 \times 10^8$ s):

$$N_W = 1.45 \times 10^8\,\mathrm{s} \cdot 4.88 \times 10^{-31}\,\mathrm{cm^2} \cdot \Phi \cdot 10 \frac{6 \times 10^{23}}{18\,\mathrm{g}} \cdot 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 1 \times 10^{15}\,\mathrm{cm^3}$$

dal quale si ricava il flusso di neutrini:

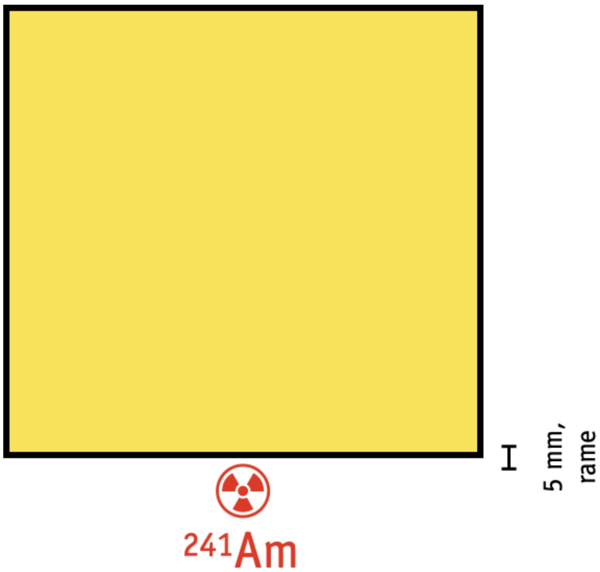
$$\Phi = \frac{1}{2.36 \times 10^{16}\,\mathrm{cm^2 s}} = 4.2 \times 10^{-17}\,\mathrm{cm^{-2} s^{-1}}$$

Il flusso per unità di angolo solido è:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi} = 3.3 \times 10^{-18}\,\mathrm{cm^{-2} s^{-1} sr^{-1}}$$

Esercizio 3

Volete misurare il numero di coppie ione-elettrone prodotte dal passaggio di particelle di energia nota in un rivelatore, che consiste in una vasca cubica di rame di 40 cm × 40 cm × 40 cm, spessa 5 mm e riempita di argon liquido. Per farlo, posizionate una sorgente radioattiva puntiforme di ^{241}Am a contatto con la parete inferiore del rivelatore. La sorgente ha una attività di 40 kBq ed emette isotropamente una particella α di 5 MeV e un fotone di 60 keV.



La sezione d'urto di interazione per fotoni di questa energia è di 170 b su rame e 30 b su argon.

1. Si determini il numero di coppie prodotte nel rivelatore ogni secondo. Per semplicità, si assuma che tutte le particelle incidenti sul rivelatore vedano lo stesso spessore di rame e di argon, e si trascuri l'effetto dello scattering multiplo.

Soluzione dell'esercizio 3

Le particelle α saranno tutte assorbite dalla parete di rame. Arriveranno nel volume di argon solamente i fotoni. Il loro cammino libero medio è

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n_B} = \frac{1}{\sigma \rho \frac{N_A}{A}},$$

dove n_B è la densità di atomi di rame (argon), $N_A = 6 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ è il numero di Avogadro e A è la massa di una mole di rame (Argon). Numericamente si ottiene

$$\lambda_{\text{Cu}} = 0.06\,\text{cm},$$
$$\lambda_{\text{Ar}} = 1.58\,\text{cm},$$

per cui:

- arriverà nel volume di argon
$$e^{-\frac{5\,\text{mm}}{\lambda_{\text{Cu}}}} = 0.077\%$$
dei fotoni emessi dalla sorgente;
- questi rilasceranno praticamente tutti la propria energia in argon (sopravviverà infatti il $10^{-9}\%$ dei fotoni.

La sorgente emette isotropamente 40000 fotoni al secondo, di cui circa metà viaggia verso il volume d'argon (metà dell'angolo solido "va persa"). Ne segue che il numero di fotoni che lasciano un segnale nel rivelatore è

$$40\,000\,\text{Hz} \times 0.5 \times 0.077\% = 15\,\text{Hz}.$$

In media i fotoni avranno 60 keV di energia, per cui il numero di coppie elettrone-ione prodotte per secondo sarà

$$15\,\text{Hz} \times \frac{60\,\text{keV}}{25\,\text{eV}} = 36900\ \text{coppie/s}.$$

Simbolo	Definizione	Valore	
		Cu	Ar
Z	Numero atomico	29	18
A	Massa atomica	64 g/mol	40 g/mol
ρ	Densità	8.9 g/cm^3	1.4 g/cm^3
$\langle I \rangle$	potenziale di ionizzazione medio	322 eV	188 eV
E_{coppia}	Energia per produzione coppia $e^- I^+$	–	25 eV
E_c	Energia critica per $e^\pm$	19 MeV	32 MeV
X_0	Lunghezza di radiazione	13 gcm^{-2}	20 gcm^{-2}
$m_{K^\pm}$	Massa del kaone carico	0.49 GeV/c^2	
$\tau_{K^\pm}$	Vita media del kaone carico	1.24×10^{-8} s	
$m_{\mu^\pm}$	Massa del muone	0.106 GeV/c^2	
m_{e^-}	Massa dell'elettrone	0.511 MeV/c^2	
m_p	Massa del protone	0.940 GeV/c^2	
$M_{W^\pm}$	Massa del bosone W	80.38 GeV/c^2	
$BR(W^- \to \overline{\nu}_e^+ e^-)$	Branching Ratio del W nel canale dato	10.75%	
ρ_{ghiaccio}	Densità del ghiaccio approssimata	1 g/cm^3	
		H	O
Z	Numero atomico	1	8
A	Massa atomica	1 g/mol	16 g/mol