Seconda prova in itinere

Fisica Nucleare e Subnucleare I

11 giugno 2021

A fine testo è presente una tabella riepilogativa con i dati per la risoluzione degli esercizi. Lo svolgimento di ciascun punto deve essere completo e includere i vari passaggi logici seguiti per ottenere il risultato numerico.

Esercizio 1

1. Stabilire quali delle seguenti reazioni sono permesse per interazione forte, motivando tutte le possibili ragioni della risposta:
   (a) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$
   (b) $d + d \to {}^4\text{He} + \pi^0$
   (c) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$
2. Motivare il fatto che il processo $n \to p + e^-$ non avviene, anche ammettendo una possibile violazione della conservazione del numero leptonico.
3. Calcolare il rapporto:
$$R = \frac{\Gamma(\Xi^{0*} \to \Xi^0 + \pi^0)}{\Gamma(\Xi^{0*} \to \Xi^- + \pi^+)}$$

Soluzione dell'esercizio 1

1. Nelle interazioni forti sia il valore totale dell'isospin, I, sia la sua terza componente, I_3, sono conservate. Inoltre, si deve conservare il sapore, in particolare la stranezza S dello stato iniziale e finale. Come in tutte le interazioni, si devono conservare la carica elettrica, il numero barionico e i numeri leptonici. Usiamo queste considerazioni:
   (a) Nel processo $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$ abbiamo il pione, che appartiene al tripletto di isospin con $|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle$ e il protone, che appartiene al doppietto di isospin con $|p\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Nello stato finale abbiamo il K^-, che nello spazio dell'isospin scriviamo come $|K^-\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ e la Σ^+, che scriviamo come $|\Sigma^+\rangle = |1, +1\rangle$. Quindi:
      - L'isospin totale $I = \frac{3}{2}$ sia nello stato iniziale che finale
      - La terza componente dell'isospin vale: $I_3 = -\frac{1}{2}$ nello stato iniziale, e $I_3 = \frac{1}{2}$ nello stato finale.

      Non si conserva dunque la terza componente dell'isospin, e la stranezza non è conservata (dall'interazione di due particelle con stranezza nulla vengono create due particelle con stranezza totale -2): quindi il processo non può avvenire per interazione forte.
   (b) L'isospin totale di ^{4}He è uguale a quello del deutone: $I(d) = I({}^4\text{He}) = 0$. L'isospin totale dello stato finale è quello di un pione, quindi $I(\pi^0) = 1$. Quindi la transizione non conserva l'isospin totale, e non può avvenire per interazione forte.
   (c) In questa reazione la carica totale è conservata ($Q = 0$), l'isospin totale è conservato ($I = 1$), e la stranezza totale ($S = -1$) è conservata. Quindi il processo può avvenire per interazione forte.
2. Lo stato finale è composto da due stati di spin $S = \frac{1}{2}$. Qualsiasi sia il momento angolare orbitale totale L, legato alla rotazione relativa delle due particelle n e e^-, questo deve essere intero ($L = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Quindi il momento angolare totale dello stato finale, $J_{fin} = L + S_1 + S_2$, deve essere intero. Lo stato iniziale è quello di un fermione di spin $S = \frac{1}{2}$, quindi $J_{in} = \frac{1}{2}$, e quindi il decadimento violerebbe la conservazione del momento angolare, cioè l'invarianza dell'Hamiltoniana per rotazioni.
3. I due processi considerati differiscono, sia nello stato iniziale, che nello stato finale, solo per scambio di una particella all'interno dei rispettivi multipletti di isospin. Assumendo le interazioni forti perfettamente

indipendenti dalla carica elettrica, la differenza tra le ampiezze dei due processi è dovuta solamente agli stati di isospin. Gli stati di isospin in gioco sono:

$$
\begin{aligned}
\left|\Xi^{0*}\right\rangle &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\
\left|\Xi^{0}\right\rangle &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\
\left|\Xi^{-}\right\rangle &= \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^{0}\right\rangle &= |1,0\rangle \\
\left|\pi^{+}\right\rangle &= |1,1\rangle
\end{aligned}
$$

Usiamo i coefficienti di Clebsh-Gordan per scrivere lo stato di isospin della $\Xi^{0*} = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ come composizione di due stati, uno con isospin totale $I = \frac{1}{2}$, e uno con $I = 1$:

$$
\left|\Xi^{0*}\right\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle
$$

Quindi le due ampiezze di decadimento, indicando con A_{00} l'elemento di matrice del decadimento $\Xi^{0*} \to \Xi^0 + \pi^0$, e con A_{-+} l'elemento di matrice del decadimento $\Xi^{0*} \to \Xi^- + \pi^+$ sono:

$$
\begin{aligned}
A(\Xi^{0*} \to \Xi^0 + \pi^0) &\propto -\sqrt{\frac{1}{3}}A_{00} \\
A(\Xi^{0*} \to \Xi^- + \pi^+) &\propto \sqrt{\frac{2}{3}}A_{-+}
\end{aligned}
$$

Le interazioni forti, che sono responsabili dei due decadimenti, sono invarianti per rotazione nello spazio di isospin, e quindi gli elementi di matrice A_{00} e A_{+-} sono identici e si semplificano nel rapporto. Inoltre lo spazio delle fasi è identico, quindi il rapporto R cercato è:

$$
R = \frac{\Gamma(\Xi^{0*} \to \Xi^0 + \pi^0)}{\Gamma(\Xi^{0*} \to \Xi^- + \pi^+)} = \frac{(-1/\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}/\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}
$$

Esercizio 2

Dei nuclei di ${}^{27}_{14}$Si decadono in nuclei di ${}^{27}_{13}$Al con decadimento β^+. Si conosce l'energia di legame del nucleo figlio: $B({}^{27}_{13}\mathrm{Al}) = 224.95\,\mathrm{MeV}$ e che l'energia massima nello spettro dei positroni emessi è $E_{max}(e^+) = 3.79\,\mathrm{MeV}$.

1. Si calcoli l'energia di legame del nucleo padre, $B({}^{27}_{14}\mathrm{Si})$.
2. Si calcoli il coefficiente del termine Coulombiano della formula di massa di Bethe-Weizsäcker senza usare i valori numerici degli altri coefficienti, e senza fare assunzioni sulla distribuzione di carica nel nucleo.
3. Si assuma ora che la carica sia distribuita con densità uniforme nel volume del nucleo. Si stimi il raggio del nucleo da considerazioni elettrostatiche, e lo si confronti con la stima basata sulla molteplicità dei nucleoni nel nucleo.

Soluzione dell'esercizio 2

1. L'energia massima del positrone, come quella del neutrino, corrisponde al Q-valore del decadimento β^+ del ${}^{27}_{14}$Si. Quindi:
$$
Q = m_p c^2 - m_n c^2 - m_e c^2 - B(A,Z) + B(A,Z-1)
$$
Quindi:
$$
E_{max}(e^+) = m_p c^2 - m_n c^2 - m_e c^2 - B(27,14) + B(27,13)
$$
e quindi si ottiene l'energia di legame del ${}^{27}_{14}$Si:
$$
B(27,14) = B(27,13) + m_p c^2 - m_n c^2 - m_e c^2 - E_{max}(e^+) = 219.36\,\mathrm{MeV}
$$

2. Se indichiamo con ΔB la differenza di energia di legame dei nuclei padre e figlio nel decadimento β^+:
$$
\Delta B = B(A,Z) - B(A,Z-1).
$$
Si può calcolare ΔB utilizzando la formula di Bethe-Weizsäcker ed osservando che gli unici termini che non si elidono tra le due energie di legame sono quello Coulombiano e quello di asimmetria, poiché:

(a) i termini di volume e di superficie dipendono solo da A, che rimane invariato,

(b) A è dispari e quindi il termine di *accoppiamento magnetico* è nullo in entrambi i nuclei.

Si ha allora:

$$\begin{aligned}\Delta B &= -a_C\left\{\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{(Z-1)^2}{A^{1/3}}\right\} - a_A\left\{\frac{(A-2Z)^2}{A} - \frac{[A-2(Z-1)]^2}{A}\right\} \\ &= -a_C\frac{2Z-1}{A^{1/3}} - 4a_A\frac{A-2Z+1}{A} \qquad (1)\end{aligned}$$

Nella reazione considerata abbiamo $A = 27$ e $Z = 14$ e quindi il termine a moltiplicare a_A è identicamente nullo. Dall'equazione 1 si ottiene:

$$a_C = -\frac{A^{1/3}\Delta B}{2Z-1} \quad .$$

e quindi:

$$a_C = -\frac{27^{1/3} \times (-5.59\,\mathrm{MeV})}{27} \approx 0.62\,\mathrm{MeV}.$$

3. L'energia elettrostatica associata a una carica Q uniformemente distribuita in una sfera di raggio R, pari a quello del nucleo, è:

$$U_E = \frac{3}{5}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

considerando che ogni protone non può interagire con se stesso, $Q^2 = Z(Z-1)e^2$, si ha:

$$U_E = \frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Z(Z-1)}{R} = \frac{3}{5}k\frac{Z(Z-1)}{R}$$

dove possiamo usare il valore numerico della costante di Coulomb $k = 1.44\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}$.

Quindi la differenza di energia elettrostatica tra i due nuclei sarà:

$$\Delta B = \frac{3}{5}\frac{k}{R}\left[Z_{\mathrm{Si}}(Z_{\mathrm{Si}}-1) - Z_{\mathrm{Al}}(Z_{\mathrm{Al}}-1)\right]$$

da cui si ricava la stima del raggio del nucleo:

$$\begin{aligned}R &= \frac{3}{5}\frac{k}{\Delta B}\left[Z_{\mathrm{Si}}(Z_{\mathrm{Si}}-1) - Z_{\mathrm{Al}}(Z_{\mathrm{Al}}-1)\right] \\ &= 0.6 \times \frac{1.44\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}}{5.59\,\mathrm{MeV}} \times [14\cdot(14-1) - 13\cdot(13-1)] \\ &\approx 4.0\,\mathrm{fm}\end{aligned}$$

Questo valore si può confrontare con quello che si otterrebbe dall'approssimazione:

$$R = R_0 \times A^{1/3} \approx 1.2\,\mathrm{fm} \times 27^{1/3} = 3.6\,\mathrm{fm}$$

che è in buon accordo con la stima elettrostatica.

Esercizio 3

Il mesone ϕ^0 e il mesone f_2^0 possono entrambi decadere per interazione forte in due pioni carichi, attraverso i processi

$$\phi^0 \to \pi^+ + \pi^-,$$
$$f_2^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

1. Si possono osservare i decadimenti

$$\phi^0 \to \pi^0 + \pi^0,$$
$$f_2^0 \to \pi^0 + \pi^0,$$

? Si motivi il perché.

Soluzione dell'esercizio 3

I due pioni neutri nello stato finale sono due particelle identiche di spin zero (bosoni), e quindi dovranno rispettare la statistica di Bose-Einstein: la loro funzione d'onda dovrà essere simmetrica nello scambio delle due particelle. Questa si scrive come il prodotto delle funzioni d'onda spaziale e di spin.

$$\psi_{\pi\pi} = \psi_L \times \psi_S,$$

Ora, i due pioni hanno spin zero, per cui lo spin totale è necessariamente zero e ψ_S è simmetrica nello scambio dei due pioni. Ne segue che la funzione d'onda spaziale dovrà essere anch'essa simmetrica, e questo è possibile solo se L è pari.

La conservazione del momento angolare totale richiede però, nei due casi, che $J_{\rm tot} = J_\phi = 1$ e $J_{\rm tot} = J_f = 2$. Se nel caso della f_2^0 questo è possibile quando $L = 2$, non esistono valori di L per cui $J_{\rm tot} = 1$, per cui solo il decadimento $f_2^0 \to \pi^0 + \pi^0$ è possibile.

Part.	M [MeV/c^2]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	1.2 10^{-8}
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	1.2 10^{-8}
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha(^4_2He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}

Tabella 1: Isospin (I), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media τ di diverse particelle.