Esercizio 1

In un esperimento di collisione protone-protone viene prodotta una particella neutra che decade istantaneamente in due muoni, emessi lungo la stessa direzione con versi opposti. Il loro impulso viene misurato con un tracciatore in campo magnetico, ed è pari a 300 MeV/c e 7.77 GeV/c.

1. Si determini la massa della particella neutra prodotta nella collisione tra protoni
2. Se il muone di impulso 300 MeV/c prodotto nel decadimento entra nella regione con un campo magnetico di $B = 0.1\,\mathrm{T}$ con direzione ortogonale al piano di propagazione delle particelle, esso percorre un'orbita circolare. Si calcoli il raggio dell'orbita iniziale e quello dopo un giro completo, supponendo che la particella si propaghi in un mezzo con densità $\rho = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$.

Soluzione dell'esercizio 1

1. La massa della particella madre si ricava dalla conservazione del quadrimpulso dei due muoni dello stato finale. Indicando con 1 e 2 i muoni finali si ha che:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{p_1^2 + m_\mu^2} = \sqrt{105^2 + 300^2}\mathrm{MeV} = 318\,\mathrm{MeV} \\ E_2 &= \sqrt{p_2^2 + m_\mu^2} \approx p_2 = 7.77\,\mathrm{GeV} \end{aligned}$$

La massa invariante del sistema finale coincide con la massa della particella madre per la conservazione del quadrimpulso totale. L'energia del sistema finale dei due muoni è:

$$E_f = E_1 + E_2 = (0.32 + 7.77)\mathrm{GeV} = 8.09\,\mathrm{GeV}$$

e il modulo dell'impulso è:

$$|\vec{p_f}| = |\vec{p_1} + \vec{p_2}| = p_2 - p_1 = (7.77 - 0.30)\mathrm{GeV} = 7.47\,\mathrm{GeV}$$

e quindi la massa invariante è:

$$m = \sqrt{E_f^2 - p_f^2} = \sqrt{8.09^2 - 7.47^2}\mathrm{GeV} = 3.11\,\mathrm{GeV}$$

Questa massa è in buona approssimazione la massa della della risonanza adronica chiamata J/ψ.

2. Il raggio (in metri) della traiettoria circolare che segue inizialmente il muone di impulso $p_1 = 300\,\mathrm{MeV}$ è dato da:

$$R[\mathrm{m}] = \frac{p[\mathrm{GeV}]}{0.3B[\mathrm{T}]} = 10.0\,\mathrm{m}$$

L'energia del muone all'ingresso del materiale con il campo magnetico è $E_1 = 318\,\mathrm{MeV}$. Il prodotto $\beta\gamma$ in questo istante è pari a:

$$\beta\gamma = \frac{p}{m} \approx 2.9$$

per cui possiamo assumere una perdita di energia per circa uguale a quella al minimo di ionizzazione:

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right) \approx 2\,\mathrm{MeV g^{-1} cm^2}$$

Per effetto della ionizzazione, dopo un giro completo, i muoni perdono un'energia pari a:

$$\Delta E = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \rho \cdot 2\pi R \approx 3.9\,\mathrm{MeV}$$

quindi l'energia dei muoni dopo un giro completo sarà di $E_1' = E_1 - \Delta E$ e quindi l'impulso:

$$p_1' = \sqrt{(E_1')^2 - m_\mu^2} = 277\,\mathrm{MeV}$$

da cui si ricava il raggio di curvatura dopo un giro: $R' = 9.2\,\mathrm{m}$.

Esercizio 2

L'energia di legame dei nuclei di ${}^4_2$He e ${}^7_3$Li è 28.3 MeV e 39.3 MeV, rispettivamente. Si consideri la reazione:

$$p + {}^7_3\text{Li} \to {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$$

1. Si verifichi se la reazione è esotermica ($Q > 0$) o endotermica ($Q < 0$).
2. Considerando il raggio del protone trascurabile, si calcoli l'energia cinetica del protone minima affinché la reazione avvenga (*Suggerimento: si consideri solo la barriera coulombiana*).
3. Lo stato di spin-parità del nucleo di ${}^7_3$Li é $J^P = (3/2)^-$, il protone ha parità $+$. Si calcoli il valore del momento angolare iniziale, assumendo che quello finale sia nullo.

Soluzione dell'esercizio 2

1. Il Q-valore della reazione è:

$$\begin{aligned} Q &= M_p + M_{\text{Li}} - 2M_\alpha = M_p + [3M_p + 4M_n - B({}^7_3\text{Li})] - 2[2M_p + 2M_n - B(\alpha)] \\ &= 2B(\alpha) - B({}^7_3\text{Li}) = 2 \cdot 28.3\,\text{MeV} - 39.3\,\text{MeV} = 17.3\,\text{MeV} \end{aligned}$$

   dove abbiamo indicato con B l'energia di legame dei nuclei. Poiché il Q-valore calcolato è positivo, la reazione è esotermica.

2. L'energia minima richiesta è quella necessaria a superare la repulsione dovuta alla barriera coulombiana del nucleo di ${}^7_3$Li all'avvicinarsi del protone. Se si assume il raggio del protone trascurabile in confronto a quello del nucleo del ${}^7_3$Li, si ha che l'energia cinetica minima, per una distanza d del protone dal nucleo, è data da:

$$T_{\text{min}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{zZ\alpha\hbar c}{R({}^7_3\text{Li})} = \frac{3 \times 197\,\text{MeVfm}}{137 \times 1.2\,\text{fm} \cdot 7^{1/3}} \approx 1.9\,\text{MeV}$$

3. Indicando i valori di spin-parità dei nuclei coinvolti nella reazione, si ha:

$$p\left(\frac{1}{2}^+\right) + {}^7_3\text{Li}\left(\frac{3}{2}^-\right) \to {}^4_2\text{He}(0^+) + {}^4_2\text{He}(0^+)$$

   Sapendo che il momento angolare orbitale dello stato finale è nullo, è nullo anche il momento angolare totale dello stato finale. Quindi la conservazione del momento angolare impone:

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus L_i = 0$$

   dove $\oplus$ indica l'operazione di addizione dei momenti angolari e L_i indica il momento angolare orbitale iniziale. I valori possibili per la composizione $\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} = 1, 2$, e quindi L_i può assumere i valori 1 o 2.

   Poiché il processo è mediato dalle interazioni forti, si deve conservare la parità nella reazione, e questo impone che la parità dello stato iniziale sia uguale a quella dello stato finale, cioè $+1$. Si ha allora:

$$P_i = P(p) \times P({}^7_3\text{Li}) \times P_{orbitale} = (+1) \times (-1) \times (-1)^{L_i} = (-1)^{L_i+1}$$

   da cui segue che L_i deve essere dispari. Quindi risulta $L_i = 1$.

Part.	M [MeV/c^2]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	1.2 10^{-8}
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	1.2 10^{-8}
K^0	497.6	1/2	-1/2	0^-	0	1	non definita
$\overline{K}^0$	497.6	1/2	1/2	0^-	0	-1	non definita
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
ρ^0	770	1	0	1^{--}	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^+	770	1	1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^-	770	1	-1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha({}^4_2He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}

Tabella 1: Isospin (I), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media τ di diverse particelle.