# Approfondimenti

Valerio Ippolito\*
9 aprile 2021

## 1 Lezione 1 (24 febbraio 2021)

#### Esercizio 1 Relazione fra forza e accelerazione

In relatività speciale, forza e accelerazione sono in generale proporzionali fra loro? Usare la definizione di forza  $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$ .

Suggerimento: scomporre l'accelerazione nella somma di un termine parallelo e un termine ortogonale alla direzione del moto (cioè alla velocità).

#### Soluzione dell'esercizio 1

Scomponiamo l'accelerazione  ${\bf a}$  lungo le direzioni ortogonale e parallela al moto della particella (cioè a  ${\bf v}$ ):

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\parallel}.$$

Usando il fatto che

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{c^2}\gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

e che, dalla definizione di prodotto scalare fra vettori,

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a},$$

<sup>\*</sup>valerio.ippolito@uniroma1.it

otteniamo che

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\gamma\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = m\gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}$$

$$= m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{v}}{c^2}$$

$$= m\gamma(\mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\parallel}) + m\gamma^3(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_{\parallel})\mathbf{v}$$

$$= m\gamma\mathbf{a}_{\perp} + m\gamma^3\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{a}_{\parallel}$$

$$= m\gamma\mathbf{a}_{\perp} + m\gamma^3\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{a}_{\parallel}$$

$$= m\gamma\mathbf{a}_{\perp} + m\gamma^3\mathbf{a}_{\parallel}.$$

Si noti come, in relatività speciale, la forza è la somma di due termini, uno parallelo all'accelerazione e uno alla velocità: è impossibile dunque definire la massa come il rapporto fra accelerazione e forza.

## 2 Lezione 8 (31 marzo 2021)

#### Esercizio 2 Elemento di matrice Lorentz-invariante

L'elemento di matrice  $T_{fi}$ , che descrive la transizione da uno stato iniziale a uno stato finale rappresentati da una funzione d'onda  $\psi$  normalizzata a 1 in un volume  $\mathcal{V}$ , non è invariante di Lorentz. Si può tuttavia definire un elemento di matrice  $\mathcal{M}_{fi}$  che è Lorentz-invariante, a patto di normalizzare la funzione d'onda di ciascuna particella a una densità di  $2E_k$  particelle in un volume  $\mathcal{V}$  (dove  $E_k$  è l'energia della particella k-esima). Se  $\psi'$  è la funzione d'onda normalizzata in questo secondo modo, l'elemento di matrice Lorentz-invariante è definito come  $\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi'_f \mid \mathbf{V} \mid \psi'_i \rangle$ .

Si giustifichi, con argomenti di relatività speciale, tale scelta di normalizzazione (a meno del fattore 2), e si esprima  $\mathcal{M}_{fi}$  in funzione di  $T_{fi}$ .

#### Soluzione dell'esercizio 2

La condizione di normalizzazione della funzione d'onda di partenza di una singola particella,  $\psi$ , si scrive

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \psi^* \psi = 1.$$

Questa scelta non è invariante sotto trasformazione di Lorentz: difatti il numero di particelle per unità di volume, nel passaggio fra sistemi di riferimento inerziali, varierà come l'inverso del volume, cioè crescerà di un fattore  $\gamma$ . Se invece si normalizza la funzione d'onda a  $kE \propto E/(mc^2) = \gamma$  particelle per unità di volume (k reale), la densità di particelle sarà invariante di Lorentz. La scelta k=2 è convenzionale (e motivata dall'espressione del numero degli stati come delta

di Dirac a quattro dimensioni che esprime la conservazione del quadrimpulso, vedi esercizi successivi).

La nuova condizione porta a definire la funzione d'onda  $\psi'$  che soddisfa

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \psi'^* \psi' = 2E,$$

da cui si ha subito che  $\psi' = \sqrt{2E}\psi$ .

Nel caso generale di un processo del tipo

$$A_1 + \cdots + A_N \rightarrow B_1 + \cdots + B_M$$

con  $N \geq 1, M \geq 2$ , descritto da una energia potenziale di interazione  ${\bf V}$ , l'elemento di matrice Lorentz-invariante sarà

$$\mathcal{M} = \langle \psi_1' \dots \psi_M' \mid \mathbf{V} \mid \psi_1' \dots \psi_N \rangle = \sqrt{\prod_{k=1}^N 2E_k \prod_{k=1}^M 2E_j T_{fi}}.$$

### Esercizio 3 Regola d'oro di Fermi

La regola d'oro di Fermi per un decadimento  $A \to B + C$  si può scrivere come  $(\hbar = c = 1)$ 

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

$$= 2\pi \int |T_{fi}|^2 \frac{dn}{dE_f} \delta(E_f - E_i) dE_f$$

$$= 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_A - E_B - E_C) dn,$$

dove la delta di Dirac rappresenta la conservazione dell'energia,  $E_i \equiv E_A = E_B - E_C \equiv E_f$ . Usando la normalizzazione delle funzioni d'onda dell'esercizio precedente, e il numero di stati accessibili

$$dn = (2\pi)^3 \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_A - \sum_{i=1}^2 \mathbf{p}_i),$$

si esprima il rate di transizione  $\Gamma_{fi}$  in funzione dell'elemento di matrice relativistico  $\mathcal{M}_{fi}$ .

#### Soluzione dell'esercizio 3

Usando la relazione

$$\mathcal{M} = \sqrt{\prod_{k=1}^{N} 2E_k \prod k} = 1^{M} 2E_j T_{fi} = \sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B} \sqrt{2E_C} T_{fi},$$

e il fatto che

$$dn = (2\pi)^3 \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C),$$

abbiamo

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_A} \int |T_{fi}|^2 \delta(E_A - E_B - E_C) \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B - \mathbf{C}).$$

Dimostreremo nel prossimo esercizio che anche i termini di spazio delle fasi  $\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3E_i}$  sono in realtà Lorentz-invarianti, visto che si possono esprimere in funzione del modulo di quadrimpulsi.

### Esercizio 4 Spazio delle fasi Lorentz-invariante

Dimostrare che il termine di normalizzazione  $1/2E_i$  per la particella i–esima può essere espresso come

$$\frac{1}{2E_i} = \int dE_i \delta(\underline{p}_i^2 - m_i^2),$$

dove  $\underline{p}_i$  è il quadrimpulso della particella ed  $m_i$  la sua massa. Questa forma è Lorentz-invariante?

Si usi questo risultato per esprimere il rate di transizione  $\Gamma_{fi}$  calcolato nell'esercizio precedente.

#### Soluzione dell'esercizio 4

Dalle proprietà della delta di Dirac,

$$\delta(f(x-x_0)) = \left( \left| \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \right)^{-1} \delta(x-x_0),$$

abbiamo che<sup>1</sup>

$$\int dE \delta(\underline{p}^2 - m_i^2) = \int dE \frac{\delta(E - E_i)}{|2E|_{E = E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}}} = \frac{1}{2E_i}.$$

Ricordando che  $p_i^2 = E_i^2 - p_i^2$ , possiamo scrivere

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_A} \int |T_{fi}|^2 \, \delta(E_A - E_B - E_C) \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B - \mathbf{p}_C) \delta(\underline{p}_B^2 - m_B^2) \delta(\underline{p}_C^2 - m_C^2)$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{2E_A} \int (2\pi)^{-6} |T_{fi}|^2 d^3 p_B d^3 p_C \delta(\underline{p}_B^2 - m_B^2) \delta(\underline{p}_C^2 - m_C^2) \delta^{(4)}(\underline{p}_A - \underline{p}_B - \underline{p}_C),$$

dove abbiamo accorpato le due delta di Dirac che esprimono la conservazione di energia e impulso in un'unica delta a quattro dimensioni. In questo modo diventa evidente che il rate di transizione è dato dall'integrale su tutti i quadrimpulsi possibili di ciascuna particella nello stato finale: le delta di Dirac faranno sì che in questo integrale contribuiranno solo i casi permessi dalla conservazione dell'energia-impulso. Il ruolo dell'elemento di matrice è invece quello di descrivere la dinamica dell'interazione.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Si noti il fattore 2 che motiva la nostra scelta della normalizzazione della funzione d'onda

#### Esercizio 5 Decadimento e vita media

Si consideri l'espressione del rate di decadimento di una particella calcolata nell'esercizio precedente. Se la vita media della particella, nel proprio sistema di riferimento, è data da

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma},$$

si determini la legge di trasformazione di  $\tau$  nel passaggio dal riferimento della particella a un riferimento in moto, e si verifichi che è consistente con la relatività speciale.

#### Soluzione dell'esercizio 5

Il rate dipende da  $1/E_A$ , quindi  $\tau \propto E_A$ , che trasforma come la componente temporale di un quadrivettore,  $E_A \to E_A \gamma$ . Come atteso, il tempo di decadimento di una particella visto da un osservatore è dilatato di un fattore  $\gamma$  rispetto a quello misurato in un sistema di riferimento in cui la particella è riposo.

## 3 Lezione 9 (9 aprile 2021)

### 3.1 L'equazione di Dirac

L'equazione di Klein Gordon<sup>2</sup> per una particella libera di massa m,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2\right)\psi = \left(\sum_{\mu=0}^4 \partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\psi \equiv (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0,$$

è un tentativo insoddisfacente di coniugare meccanica quantistica e relatività speciale. Abbiamo infatti visto a lezione che quest'equazione ha almeno due problemi:

• non rispetta la stessa forma dell'equazione di Schrödinger

$$i\partial(|\psi\rangle)/\partial t = H\psi;$$

• porta a una densità di probabilità  $\rho$  negativa.

Dirac prova a risolvere questo puzzle nel caso dell'elettrone, o in generale di un fermione di spin 1/2. La sua idea è quella di caratterizzare lo stato in cui si trova un elettrone non solo con l'etichetta temporale,  $|\psi,t\rangle$ , ma aggiungendo un grado di libertà – una etichetta aggiuntiva a – per caratterizzarne ad esempio la terza componente dello spin (l'autovalore del'operatore  $\mathbf{S_3}$ ,  $S_3 = \pm 1/2$ ):

$$|\psi,t\rangle \longrightarrow |\psi,a,t\rangle.$$

Dirac generalizza l'equazione di Schrödinger, scrivendo

$$i\frac{\partial \psi_a(x)}{\partial t} = H_{ab}\psi_b(x),$$

 $<sup>^2</sup>$ Usiamo  $\hbar=c=1$ e la notazione per cui  $\partial_j=\partial/\partial x^j,$  con  $j\in\{1,2,3\}.$ 

dove si sottointende la sommatoria su tutti gli indici ripetuti (notazione di Einstein). Quello che sta facendo è far parlare, attraverso l'hamiltoniana  $H_{ab}$ , l'evoluzione temporale di una soluzione dell'equazione (ad esempio, quella che descrive un elettrone con  $S_3 = +1/2$ ) con tutte le altre soluzioni. Quante? O in altri termini: quanti sono i valori possibili di a e b? Per scoprirlo, ci serve di ricondurre l'inusuale hamiltoniana  $H_{ab}$  a qualcosa di più consueto.

Dirac sceglie di scrivere l'hamiltoniana come

$$H_{ab} = \mathbf{P}_j \alpha_{ab}^j + m \beta_{ab}$$

cioè come la somma di un termine che moltiplica la massa della particella e di altri tre termini, uno per ogni componente j dell'impulso spaziale. In questo modo, adottando la solita sostituzione  $\mathbf{P}_i \to -\imath \partial_i$ , si ha che

$$i\frac{\partial \psi_a(x)}{\partial t} = H_{ab}\psi_b(x)$$

$$= \left[ \left( \alpha_{ab}^j \mathbf{P}_j \right) + m \left( \beta_{ab} \right) \right] \psi_b(x)$$

$$= \left[ -i\alpha_{ab}^j \partial_j + m\beta_{ab} \right] \psi_b(x).$$

Cosa sono  $\alpha_{ab}$  e  $\beta_{ab}$ ? Numeri? Operatori? Per rendere la generalizzazione meno astratta, la strategia è quella di imporre che l'hamiltoniana sia consistente con la relazione  $E^2=p^2+m^2$  a cui ci ha abituato la relatività speciale. Cioè, vogliamo che

$$H_{ab}^2 = (H^2)_{ab} = (\mathbf{P}^2 + m^2) \, \delta_{ab},$$

dove  $\delta$  è la delta di Kronecker. La prima uguaglianza serve solo a ricordarci formalmente come si fa il quadrato dell'operatore  $H_{ab}$ : nei fatti è una matrice con un numero di righe e colonne (i valori possibili di a e b di cui sopra) che dobbiamo determinare.

Come scriviamo  $H_{ab}^2$ ? Con molta attenzione! Dobbiamo cioè moltiplicare H per sé stessa, facendo attenzione a non assumere in nessun momento che  $\alpha$  o  $\beta$  siano numeri (cioè che commutino fra loro): scriveremo perciò, sempre beandoci della notazione di Einstein,

$$H_{ab}^{2} = \mathbf{P}_{j} \mathbf{P}_{k} \left( \alpha^{j} \alpha^{k} \right)_{ab} + m^{2} \left( \beta^{2} \right)_{ab} + m \mathbf{P}_{j} \left( \alpha^{j} \beta + \beta \alpha^{j} \right)_{ab}$$
$$= \left( \mathbf{P}^{2} + \mathbf{m}^{2} \right) \delta_{ab},$$

dove l'ultima eguaglianza ci ricorda come vogliamo che sia  $H^2$ . La notazione di Einstein è compatta e ci evita di scrivere ogni volta un numero enorme di sommatorie, ma all'inizio è difficile da digerire: svolgete esplicitamente il calcolo qua sopra (cioè le sommatorie) per convincervi che è così che si fa un quadrato. In particolare, osservate come la sommatoria sia su tutti i valori possibili di j e su tutti i valori possibili di k (entrambi gli indici: si tratta cioè di  $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3}$ , non di  $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k>j}!$ ).

non di  $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k>j} !$ ). Da questa equazione impariamo cosa sono, cioè come si comportano,  $\alpha$  e  $\beta$ . Vogliamo che il termine in cui non appaiono gli operatori impulso sia

$$m^2 \left(\beta^2\right)_{ab} = m^2 \delta_{ab},$$

cioè che  $(\beta^2)_{ab} = \delta_{ab}$ . Vogliamo che il termine misto in cui compare un impulso e la massa sia nullo qualsiasi sia il valore dell'impulso, ovvero

$$\alpha^j \beta + \beta \alpha^j \equiv \{\alpha^j, \beta\} = 0,$$

dove abbiamo usato le parentesi graffe per indicare l'anticommutatore dei due operatori. E infine, vogliamo che nel termine che contiene due volte l'impulso non compaiano termini misti con  $j \neq k$ , del tipo  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ . Per imporre quest'ultima condizione useremo un'astuta osservazione che apparirà spesso nei corsi di fisica teorica del quarto (e quinto) anno: notiamo cioè che il termine  $\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k$  è simmetrico sotto scambio di indici, e che quindi sopravviveranno alla sommatoria su j e k solo i casi in cui  $\alpha^j\alpha^k$  è simmetrico sotto scambio di indici. A questo punto, poiché per due operatori A e B qualunque possiamo sempre scrivere

$$AB = AB - BA + BA$$

$$= [A, B] + BA$$

$$= [A, B] + BA + AB - AB$$

$$= [A, B] + \{A, B\} - AB,$$

$$AB = \frac{1}{2} ([A, B] + \{A, B\}),$$

e visto che il commutatore è per costruzione antisimmetrico nello scambio di indici e l'anticommutatore è simmetrico, abbiamo che

$$\mathbf{P}_{j}\mathbf{P}_{k}\left(\alpha^{j}\alpha^{k}\right)_{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{j}\mathbf{P}_{k}\left(\left\{\alpha^{j},\alpha^{k}\right\} + \left[\alpha^{j},\alpha^{k}\right]\right)_{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{P}_{j}\mathbf{P}_{k}\left(\left\{\alpha^{j},\alpha^{k}\right\}\right)_{ab} + 0,$$

e vogliamo che tutto questo sia uguale a  $\mathbf{P}^2\delta_{ab}$ , cioè che

$$\frac{1}{2} \left( \left\{ \alpha^j, \alpha^k \right\} \right)_{ab} = \delta^{jk} \delta_{ab}.$$

Abbiamo cioè faticosamente ottenuto delle relazioni di anticommutazione fra queste misteriose matrici  $\alpha$  e  $\beta$ , cioè sappiamo come queste devono comportarsi. Il passo successivo è scoprire che matrici sono: il processo logico è fare vari tentativi, partendo da diverse ipotesi sulla loro dimensionalità (che poi significa "diverse ipotesi su quanti sono i valori possibili di a"). Quello che si trova è che questa dimensione è 4, cioè che queste matrici devono essere matrici  $4\times 4$ . L'equazione di Dirac descrive cioè 4 "versioni" possibili della stessa particella – non solo due, come si sarebbe potuto pensare visto che  $S_3=\pm 1/2!$ 

Durante il corso di fisica teorica del primo semestre del quarto anno (o se leggete il capitolo 7 del Griffiths) scoprirete come scrivere esplicitamente queste matrici e come calcolare l'energia dei 4 gruppi di autostati dell'hamiltoniana, che sono soluzioni dell'equazione di Dirac  $i\partial\psi_a/\partial t = H_{ab}\psi_b$ . Troverete che

 $<sup>^3{\</sup>rm Anche}$  questa è una cosa che una volta nella vita vale la pena verificare a mano svolgendo le sommatorie.

metà di queste soluzioni hanno energia positiva, e descrivono le particelle (ad esempio l'elettrone, o il protone... in generale qualunque fermione di spin 1/2), mentre le soluzioni a energia negativa descrivono le corrispondenti particelle (positrone, antiprotone...). Questo succedeva anche nel caso dell'equazione di Klein Gordon: ma l'equazione di Dirac ha la proprietà, che pure dimostrerete nel prossimo semestre, che la densità di probabilità è sempre positiva, anche per le antiparticelle.