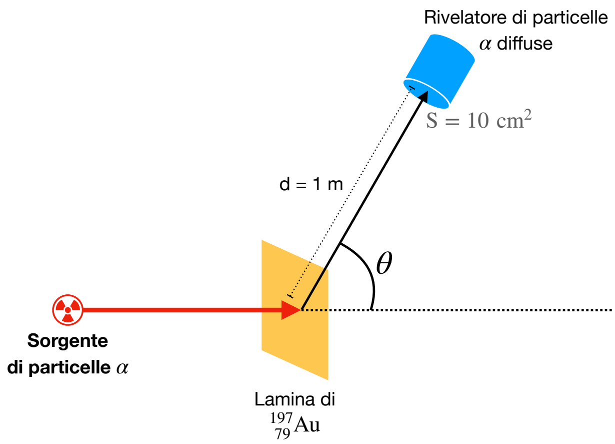
Appello di Giugno

Fisica Nucleare e Subnucleare I

21 Giugno 2022

Esercizio 1

Una sorgente di ^{241}Am emette particelle α di energia cinetica $E_\alpha = 5.5\,\mathrm{MeV}$, che vengono fatte impattare su una lamina di oro ($^{197}_{79}$Au), con densità $\rho = 19\,300\,\mathrm{kg/m^3}$ spessa $\delta = 50\,\mu\mathrm{m}$. Un rivelatore, avente una sezione efficace $S = 10\ \mathrm{cm}^2$ è posto a una distanza $d = 1$ m dalla lamina, e conta le particelle α diffuse a diversi angoli θ, come in figura. Tra il punto di interazione e il rivelatore di particelle c'è il vuoto.



La sezione d'urto differenziale di interazione è descritta dalla formula di Rutherford

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\frac{zZ\alpha(\hbar c)}{4E}\right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

1. Si calcoli la frazione di angolo solido sotteso dal contatore di particelle α.
2. Si stimi l'intensità minima della sorgente (numero di particelle α al secondo) per avere almeno 10 conteggi/s nel rivelatore, quando questo è posto a un angolo $\theta = 60°$ rispetto alla direzione di volo del fascio incidente.
3. Se le particelle α possono essere accelerate a piacere, l'energia può essere sufficiente per produrre il mesone J/ψ tramite la:

$$\alpha\ +\ p\ \rightarrow\ J/\psi\ +\ \alpha\ +\ p$$

   Si calcoli l'energia minima delle particelle α affinché la reazione possa avvenire (assumendo i protoni del bersaglio fermi).

Soluzione dell'esercizio 1

1. L'angolo solido sotteso dal rivelatore, che si può approssimare come un dischetto di superficie $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ posto a una distanza $d = 1\,\mathrm{m}$ dal punto di interazione, vale

$$\Delta\Omega = \frac{S}{d^2} = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{sr}$$

   La frazione di angolo solido corrispondente è perciò $\Delta\Omega/(4\pi) = 0.008\%$.

2. La sezione d'urto vista dal rivelatore posto a $\theta = 60°$ è data da:

$$\sigma = \left[\frac{zZ\alpha(\hbar c)}{4E_\alpha}\right]^2 \frac{\Delta\Omega}{\sin^4(\theta/2)} = \left[\frac{2 \times 79 \times 197\,\mathrm{MeV\,fm}}{137 \times 4 \times 5.5\,\mathrm{MeV}}\right]^2 \frac{1 \times 10^{-3}}{0.0625} = 1.71\,\mathrm{fm}^2 = 1.71 \times 10^{-26}\,\mathrm{cm}^2$$

La frequenza degli eventi osservati dipende dalla sezione d'urto e dal numero di bersagli per unità di volume nella lamina d'oro attraversata. L'oro ha numero atomico $A = 197$, e quindi la frequenza è:

$$f = I_\alpha \rho \times \delta \frac{N_A}{A} \sigma$$

dove I_α è l'inensità (numero di particelle α al secondo), e $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro. Per avere la condizione richiesta, cioè una $f > 10\,\mathrm{s}^{-1}$ si deve avere:

$$I_\alpha > \frac{A}{\rho \delta N_A} \frac{f}{\sigma} = \frac{197}{19.3\,\mathrm{g/cm}^3 \times 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{cm} \times 6.02 \times 10^{23}} \frac{10}{1.71 \times 10^{-26}\,\mathrm{cm}^2} \approx 1.99 \times 10^6\,\mathrm{s}^{-1} = 1.99\,\mathrm{MHz}$$

3. La soglia della reazione è data in energia cinetica della particella α da:

$$T_\alpha^{\text{soglia}} = \frac{(m_p + m_\alpha + m_J)^2 - (m_p + m_\alpha)^2}{2m_p} = m_J + \frac{m_J^2 + 2m_J m_\alpha}{2m_p} = 20.5\,\mathrm{GeV}$$

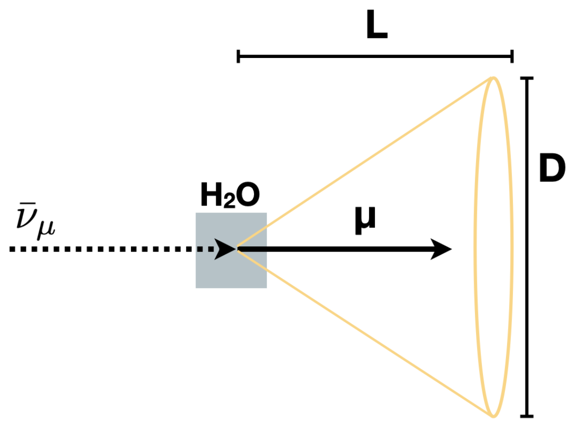
L'energia totale della particella α è data da:

$$E_\alpha^{min} = T_\alpha^{\text{soglia}} + m_\alpha = 24.3\,\mathrm{GeV}$$

Esercizio 2

L'esperimento Super-Kamiokande studia l'interazione di anti-neutrini muonici $\bar{\nu}_\mu$ con un rivelatore composto da un enorme bersaglio d'acqua ($n = 1.33$) circondato da rivelatori di fotoni.

1. Scrivere una reazione in cui un $\bar{\nu}_\mu$, interagendo con un nucleone del bersaglio, produca un muone o un antimuone nello stato finale, e specificare che interazione è responsabile per tale processo.
2. I muoni prodotti hanno impulso medio di $p = 500\,\mathrm{MeV/c}$ e producono luce Čerenkov nell'acqua, a una distanza media di $L = 10$ m dai rivelatori di fotoni. Determinare il diametro medio D degli anelli Čerenkov prodotti, quando raggiungono i rivelatori dei fotoni, come schematizzato in figura.



Soluzione dell'esercizio 2

1. La reazione in questione sarà del tipo:

$$\bar{\nu}_\mu + p/n \rightarrow \mu^\pm + X$$

Per bilanciare la reazione bisogna conservare: la carica elettrica Q, il numero barionico B, e il numero leptonico muonico L_μ. La soluzione è:

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

L'interazione responsabile per questa reazione è necessariamente la forza debole, dato che i neutrini interagiscono solo debolmente.

2. Se i muoni hanno $p = 500$ MeV, allora hanno $E = \sqrt{p^2 + m^2} = 511$ MeV, e quindi $\beta = p/E = 0.978$ e $\gamma = E/m = 511/106 = 4.82$. (La luce Čerenkov è emessa dato che $\beta > 1/n = 0.75$.) L'angolo Čerenkov θ_C è dato da:

$$\theta_C = cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta n}\right) = 0.69$$

Il raggio R dell'anello prodotto a una distanza $L = 10$ m si trova con la trigonometria:

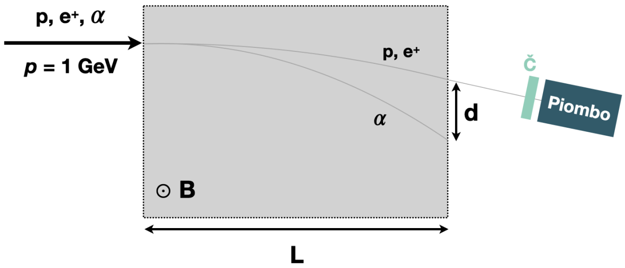
$$\tan\theta_C = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow R = L\tan\theta_C = 8.3 \text{ m}$$

Il diametro D sarà dunque $D = 2R = 16.6$ m.

Esercizio 3

Un fascio composto da protoni, positroni e particelle α con impulso $p = 1\,\mathrm{GeV/c}$ entra in una regione lunga $L = 1$ m in cui è presente un campo magnetico B orientato nella direzione ortogonale al moto, come in figura.



1. Determinare l'intensità del campo B in modo che all'uscita dello spettrometro magnetico le particelle α si siano discostate di almeno $d = 3$ cm da protoni e positroni. Mettersi nell'approssimazione in cui il raggio di curvatura è molto maggiore di L.

2. Dopo il campo magnetico, protoni e positroni passano attraverso un contatore Čerenkov (Č) con indice di rifrazione $n = 1.1$. Determinare se positroni e protoni producono o meno luce Čerenkov.

3. Successivamente, i protoni e positroni colpiscono un assorbitore di piombo ($^{207}_{82}$Pb, $\rho = 0.0113$ kg/cm^3, $X_0 = 0.56\,$cm, $\langle I_{ion}\rangle = 845\,$eV) lungo $l_{Pb} = 5$ cm. Determinare se protoni e positroni sono completamente assorbiti nel piombo. (Approssimare la perdita di energia per ionizzazione a quella prevista al minimo di ionizzazione. Si trascurino le differenze in termine di ionizzazione tra positroni e altre particelle cariche, la correzione di shell e l'effetto densità. Si trascuri poi l'effetto delle interazioni nucleari.)

Soluzione dell'esercizio 3

1. Visto che tutte le particelle hanno lo stesso impulso, nella regione di campo magnetico subiranno una forza di Lorentz $p = qRB$ che sarà la stessa per positroni e protoni (che hanno la stessa carica) e doppia per le particelle α (che ha carica doppia). La deviazione x dalla direzione iniziale, dopo una regione di campo magnetico B lunga L è data da:
$$x = q\frac{BL^2}{2p}$$
Quindi:
$$d = x_\alpha - x_{e,p} = (q_\alpha - q_{e,p})\frac{BL^2}{2p}$$
E quindi, ricavando B:
$$B = \frac{2dp}{(q_\alpha - q_{e,p})L^2}$$
Passando a unità naturali:
$$B[\text{T}] = \frac{2d[\text{m}]p[\text{GeV}]}{0.3L^2[\text{m}^2]} = \frac{2\cdot 0.03\cdot 1}{0.3\cdot 1^2} = 0.2\ \text{T}$$

2. Le particelle producono luce Čerenkov se hanno $\beta > 1/n = 0.91$. Un impulso $p = 1$ GeV corrisponde a $\beta_e \approx 1$ per positroni, e a $\beta_p \approx 0.73$ per protoni. Quindi solo i positroni producono luce Čerenkov.

3. Per i protoni dobbiamo considerare la perdita di energia per ionizzazione: usando la perdita al minimo di ionizzazione di circa 1.7 MeV g^{-1} cm$^2 \cdot \rho_{Pb} \approx 19.2$ MeV/cm (dove si è moltiplicato per la densità del piombo dopo averla trasformata in g/cm^3). Si ha quindi una perdita di energia per ionizzazione all'interno del piombo pari a:
$$\Delta E_{ion} = \left(\frac{dE}{dx}\right)\cdot d_{Pb} = 19.2\cdot 5 = 96\ \text{MeV}$$
Quindi i protoni non sono assorbiti.

   Se si volesse usare la formula di Bethe-Bloch approssimata per calcolare la perdita di energia per ionizzazione:
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = C\frac{Z}{A}\left(\frac{z}{\beta}\right)^2\left[\log\frac{2m_ec^2(\beta\gamma)^2}{\langle I\rangle} - \beta^2\right]$$
usando la costante $C \approx 0.3\,\text{MeV/gcm}^2$, i valori dati per il piombo: $Z = 82$ e $A = 207$, e la carica del protone $z = 1$, in unità di cariche elementari si ottiene:
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx 1.54\,\text{MeVg}^{-1}\text{cm}^2$$

e quindi allo stesso modo calcoliamo la perdita di energia per ionizzazione moltiplicando per la densità e il percorso nel piombo:

$$\Delta E_{ion} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{dE}{dx}\right) \cdot \rho \cdot d_{Pb} = 87\,\mathrm{MeV}$$

e quindi circa lo stesso valore che abbiamo usato usando l'approssimazione di m.i.p..

Per i positroni, oltre all'energia persa per ionizzazione, bisogna tenere in considerazione anche le perdite di energia per radiazione. Infatti si può verificare che la loro energia è maggiore dell'energia critica del piombo ($E_C \approx 700\,MeV/Z \approx 8\,MeV$). Dopo 5 cm di piombo, i positroni avranno perso in media un'energia pari a:

$$\Delta E = E(1 - \exp\{-l_{Pb}/X_0\}) = 999.9 \text{ MeV}$$

Quindi, se si sommano le energie perse dai positroni per ionizzazione e radiazione, si può concludere che sono assorbiti nel piombo.

Part.	M [MeV/c^2]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	1.2 10^{-8}
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	1.2 10^{-8}
K^0	497.6	1/2	-1/2	0^-	0	1	non definita
$\overline{K}^0$	497.6	1/2	1/2	0^-	0	-1	non definita
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
ρ^0	770	1	0	1^{--}	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^+	770	1	1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^-	770	1	-1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha(^4_2He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}
J/ψ	3096.9	0	0	1^{--}	0	0	7.2×10^{-21}

Tabella 1: Massa (M), isospin (I, e sua terza componente I_3), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media (τ) di diverse particelle adroniche.

Part.	M [MeV/c^2]	τ [s]
e^-	0.511	stabile
μ^-	105.6	2.2×10^{-6}
τ^-	1776	2.9×10^{-13}
$\nu_{e/\mu/\tau}$	0	stabile

Tabella 2: Massa (M) e vita media (τ) dei leptoni.

Costanti utili:

- $\hbar c = 197\,\mathrm{MeV\,fm}$
- costante di normalizzazione per $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ di ionizzazione: $C = 0.307$ MeV g^{-1} cm^2