Esercizio

1) Calcolare l'impulso di un pione π^+ che ha la stessa velocità di un protone di impulso $p_p = 400.0$ GeV/c.

   Tale è l'impulso più probabile dei pioni che vengono prodotti al Fermilab di Chicago inviando un fascio di protoni di 400.0 GeV/c su un bersaglio sottile.
   Una volta prodotti, i pioni entrano in un tunnel di lunghezza $x = 400.0$ m in cui alcuni di essi decadono secondo la reazione

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$$

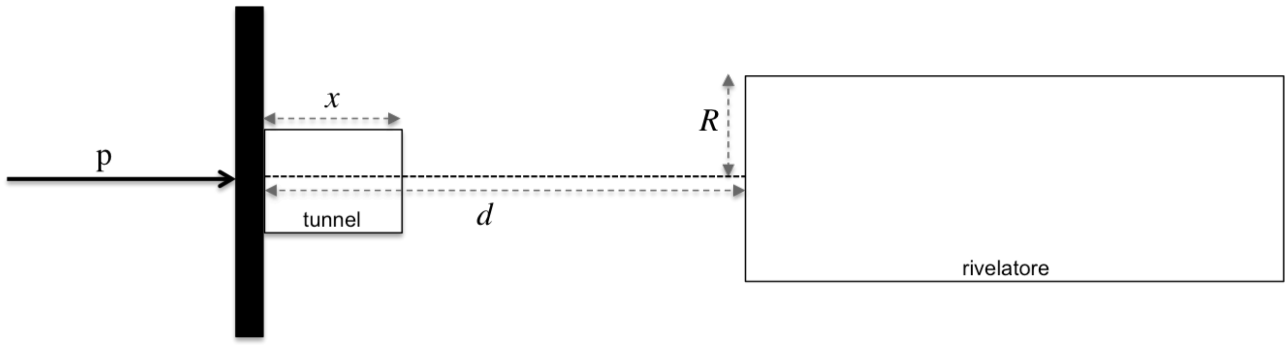
2) Calcolare la frazione dei pioni che decadono nel tunnel sapendo che il tempo di vita medio proprio dei pioni carichi è τ_{0_π}.

3) Calcolare l'energia massima dei muoni.

4) Calcolare la lunghezza del tunnel misurata da un osservatore solidale al pione.

5) Calcolare il raggio minimo R che deve avere un rivelatore cilindrico posto a distanza $d = 1.4$ km dal bersaglio, nel verso del fascio, affinché sia in grado di rivelare tutti i μ^+ prodotti nel tunnel.

$m_\pi = 0.1396$ GeV/c^2, $m_p = 0.9383$ GeV/c^2, $m_\mu = 0.1056$ GeV/c^2, $\tau_{0_\pi} = 2.603 \times 10^{-8}$ s.



Soluzione

Per un protone di impulso p_p (c = 1)

$$\beta\gamma = \frac{p_p}{m_p} = \frac{400.0 \text{ GeV}}{0.9383 \text{ GeV}} = 426.3$$

Un π^+ con lo stesso $\beta\gamma$ ha impulso

$$p_\pi = m_\pi \beta\gamma = 0.1396 \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2} \times 426.3\text{c} = \boxed{59.51 \text{ GeV/c}}.$$

La frazione dei pioni che decadono nel tunnel è

$$1 - \frac{N(x)}{N_0} = 1 - e^{-\frac{x}{\beta c \gamma \tau_0}} = 1 - e^{-\frac{400.0 \text{ m}}{426.3 \times 2.998 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 2.603 \times 10^{-8} \text{ s}}} = \boxed{11.33\ \%}.$$

Dato che

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$(\beta\gamma)^2 = \gamma^2 - 1$$

$$\gamma = \sqrt{(\beta\gamma)^2 + 1} \simeq \beta\gamma \text{ e } \beta \simeq 1.$$

La lunghezza del tunnel, misurata da un osservatore solidale al pione, è

$$x' = \frac{x}{\gamma} = \frac{400.0 \text{ m}}{426.3} = \boxed{93.83 \text{ cm}}.$$

L'energia dei muoni nel sistema di riferimento del centro di massa è (c = 1)

$$E_\mu^* = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi}$$

L'impulso dei muoni nel sistema di riferimento del centro di massa è (c = 1)

$$p_\mu^* = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}$$

L'energia massima dei muoni è (c = 1)

$$E_\mu = \gamma\left(E_\mu^* + \beta p^*\right) \simeq \gamma\left(E_\mu^* + p^*\right) = \gamma\left(\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} + \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}\right) = \gamma \times m_\pi = p_\pi = \boxed{59.51 \text{ GeV}}.$$

La velocità dei μ^+dal decadimento dei π^+ nel sistema di riferimento del centro di massa è

$$\beta_\mu^* = \frac{p_\mu^*}{E_\mu^*} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} = \frac{(0.1396^2 - 0.1056^2) \text{ GeV}^2/\text{c}^4}{(0.1396^2 + 0.1056^2)\text{GeV}^2/\text{c}^4} = 0.272$$

Dato che la velocità del centro di massa è $\beta \simeq 1 > \beta_\mu^*$, i muoni vengono emessi tutti in avanti ed esiste un angolo massimo di emissione dei muoni θ_{max} tale che

$$\tan\theta_{\text{max}} = \frac{\beta_\mu^*}{\gamma\sqrt{\beta^2 - {\beta_\mu^*}^2}} = 6.633 \times 10^{-4}$$

Il raggio minimo R che deve avere un rivelatore cilindrico posto a distanza $d = 1.4$ km dal bersaglio affinché sia in grado di rivelare tutti i μ^+prodotti nel tunnel è

$$R = d \times \tan\theta_{\text{max}} = 1.4 \text{ km} \times 6.633 \times 10^{-4} = \boxed{93 \text{ cm}}.$$

Esercizio

Un fascio di particelle incide con una *rate* di 1.00×10^{6} s^{-1} su un foglio di oro il cui spessore è $d = 1.00\times10^{-2}$ cm. La sezione d'urto per assorbimento per ogni nucleo di oro, all'energia del fascio, è $\sigma = 1.00\times10^{-3}$ b. Calcolare

1. il libero cammino medio delle particelle nell'oro;
2. la *rate* di interazione;
3. quale dovrebbe essere lo spessore dell'oro per ridurre alla metà l'intensità del fascio.

($M_{\text{Au}} =$ 196,97 g mol^{-1}, $\rho_{\text{Au}} = 19.320$ g cm^{-3}, $N_{\text{A}} = 6.022\times10^{23}$ mol^{-1})

Soluzione

La densità numerica dei centri scatteratori (i nuclei di oro) è

$$n_{\text{Au}} = \frac{\rho_{\text{Au}}\, N_{\text{A}}}{M_{\text{Au}}} = \frac{19.320 \text{ g cm}^{-3}\times6.022\times10^{23} \text{ mol}^{-1}}{196.97 \text{ g mol}^{-1}} = 5.907\times10^{22} \text{ cm}^{-3}.$$

Il libero cammino medio delle particelle nell'oro è

$$\lambda = \frac{1}{\sigma\, n_{\text{Au}}} = \frac{1}{1.00\times10^{-3}\times10^{-24} \text{ cm}^{2}\times5.907\times10^{22} \text{ cm}^{-3}} = 1.69\times10^{4} \text{ cm} = \boxed{169 \text{ m}}.$$

La *rate* di interazione è

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_{\text{a}}}{dt}\frac{1}{\lambda}d = 1.00\times10^{6} \text{ s}^{-1}\times\frac{1}{1.69\times10^{4} \text{ cm}}\times1.00\times10^{-2} \text{ cm} = \boxed{0.591 \text{ s}^{-1}}.$$

Per ridurre alla metà l'intensità del fascio, lo spessore dell'oro dovrebbe essere d':

$$\frac{1}{2} = \frac{I(d')}{I_0} = e^{-\frac{d'}{\lambda}}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{d'}{\lambda}$$

$$\ln 2 = \frac{d'}{\lambda}$$

$$d' = \ln 2\times\lambda = \ln 2\times169 \text{ m} = \boxed{117 \text{ m}}.$$