Appello di Luglio

Fisica Nucleare e Subnucleare I

7 Luglio 2022

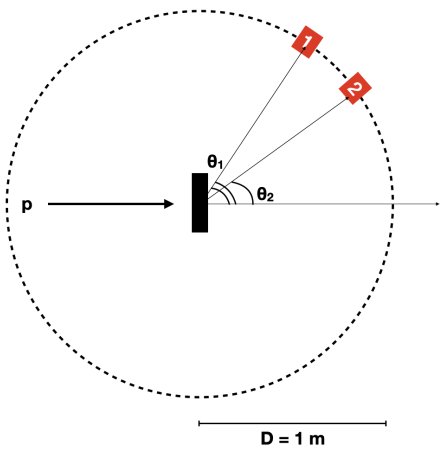
Esercizio 1

Un gruppo di ricercatori ha recentemente affermato di aver scoperto una nuova particella, denominata X, con massa $m_X = 17$ MeV e vita media trascurabile ($\tau_X \approx 0$). Volete provare a produrre il processo

$$p + p \to X + p + p,$$

a cui poi segue $X \to e^+ + e^-$, inviando un fascio di protoni su un bersaglio fisso, e rivelando elettrone e positrone di decadimento tramite due rivelatori di sezione $S = 1\,\mathrm{cm}^2$. I due rivelatori rivelano indifferentemente elettroni e positroni, e possono scorrere su una guida a distanza fissata $D = 1\,\mathrm{m}$ dal bersaglio (vedi figura).

1. Assumendo i protoni del bersaglio fermi nel sistema di riferimento del laboratorio, quale energia devono avere i protoni del fascio di modo che la reazione abbia luogo?
2. Nella configurazione di soglia, se il positrone dello stato finale viene emesso a un angolo $\theta^*_+ = 30^\circ$ nel sistema di riferimento solidale con la particella X, a quale angolo posizionerete i due rivelatori nel laboratorio per osservare il decadimento della X ? *(θ è l'angolo polare definito rispetto alla direzione del fascio di protoni, come in figura.)*
3. Se la sezione d'urto totale del processo $p + p \to X + p + p$ vale $\sigma = 3 \times 10^{-2}$ fb e il processo è isotropo nel sistema di riferimento del laboratorio, si calcoli la luminosità $\mathcal{L}$ (ovvero il prodotto fra flusso di particelle incidenti e numero di centri diffusori) necessaria a misurare 3 eventi in un anno, nell'ipotesi che il rapporto di decadimento $BR(X \to e^+ + e^-)$ sia 100%. (*Suggerimento: si consideri la copertura angolare effettiva dell'esperimento come la somma degli angoli solidi coperti dai due rivelatori.*)



Soluzione dell'esercizio 1

1. Perché il processo sia possibile l'energia del fascio dev'essere sopra una certa energia di soglia, che è quella per cui le tre particelle sono prodotte ferme nello stato finale:

$$\begin{aligned}
\sqrt{s} &= \sqrt{(E_p + m_p)^2 - p_p^2} \\
&= \sqrt{E_p^2 + m_p^2 + 2E_p m_p - p_p^2} \\
&= \sqrt{2m_p^2 + 2E_p m_p} \\
&= \sqrt{(E^*_{p_1} + E^*_{p_2} + E^*_X)^2 - (\mathbf{p}^*_{p_1} + \mathbf{p}^*_{p_2} + \mathbf{p}^*_{pX})^2}, \\
&\geq m_p + m_p + m_X,
\end{aligned}$$

perciò

$$E_p \geq \frac{(m_p + m_p + m_X)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = 972.45\,\text{MeV},$$

corrispondente a una energia cinetica $T_p \geq 34.15\,\text{MeV}$ e a un impulso $p_p = 255.46\,\text{MeV}$.

2. Visto che siamo a soglia, il sistema del centro di massa è quel sistema in cui sia la X che i due protoni di stato finale sono fermi. La conservazione dell'impulso impone che positrone ed elettrone siano emessi ad angoli θ^* pari a $30\,\text{deg}$ e $210\,\text{deg}$. Poiché provengono da un decadimento a due corpi, hanno energia univocamente determinata, pari a

$$E^*_\pm = \frac{m_X}{2} = 8.5\,\text{MeV},$$

corrispondente a un impulso di modulo $p^*_\pm = \sqrt{(E^*_\pm)^2 - m_e^2} \approx 8.485\,\text{MeV}$, e quindi $\beta^*_\pm = p^*_\pm / E^*_\pm \approx 0.99824$.

Nel laboratorio la particella X decade in moto: quando la reazione di produzione è a soglia, la X ha una velocità pari a quella del centro di massa, dove

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{|\mathbf{p}_{\text{tot}}|}{E_{\text{tot}}} = \frac{255.46\,\text{MeV}}{972.45\,\text{MeV} + 938.3\,\text{MeV}} \approx 0.1337, \\
\gamma &= \frac{E_{\text{tot}}}{\sqrt{s}} = \frac{972.45\,\text{MeV} + 938.3\,\text{MeV}}{938.3\,\text{MeV} + 938.3\,\text{MeV} + 17\,\text{MeV}} \approx 1.00906.
\end{aligned}$$

Nel sistema del laboratorio positrone ed elettrone vengono rivelati ad angoli dati da

$$\begin{aligned}
\tan(\theta_+) &= \frac{\sin(\theta^*_+)}{\gamma\left(\beta E^*_+/p^*_+ + \cos\theta^*_+\right)} \\
&= \frac{0.5}{1.00906 \times (0.1337 \times 8.5\,\text{MeV}/8.485\,\text{MeV} + 0.866)} \approx 0.4955, \\
\tan(\theta_-) &= \frac{\sin(\theta^*_-)}{\gamma\left(\beta E^*_-/p^*_- + \cos\theta^*_-\right)} \\
&= \frac{-0.5}{1.00906 \times (0.1337 \times 8.5\,\text{MeV}/8.485\,\text{MeV} - 0.866)} \approx 0.6769,
\end{aligned}$$

corrispondente ad angoli $\theta_\pm$ per positrone ed elettrone di 0.460 ($26.4\,\text{deg}$) e 3.737 ($214.1\,\text{deg}$), rispettivamente.

3. La sezione d'urto in cm^2 è

$$\sigma = 3 \times 10^{-2}\,\text{fb} \times 1 \times 10^{-24}\,\text{cm}^2/\text{b} = 3 \times 10^{-41}\,\text{cm}^2.$$

Il numero di eventi osservato è legato a questa, alla luminosità, al tempo di presa dati e all'angolo solido visto dal rivelatore tramite

$$N = \sigma \mathcal{L} \Delta t \frac{\Delta\Omega}{4\pi},$$

per cui cerchiamo

$$\mathcal{L} = \frac{N}{\sigma \Delta t \frac{\Delta\Omega}{4\pi}}.$$

L'intervallo temporale di presa dati è lungo

$$\Delta t = 365.25 \times 24 \times 3600 = 31\,557\,600\,\mathrm{s}.$$

L'angolo solido visto da un singolo rivelatore vale

$$\Delta\Omega = \frac{S}{D^2} = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{sr},$$

perciò la frazione di angolo solido coperta dal rivelatore nel suo complesso è

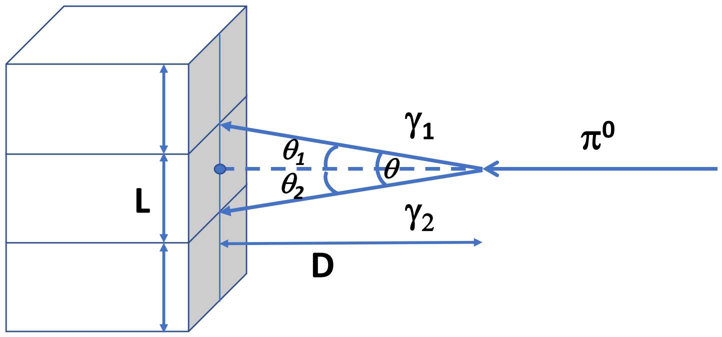
$$\frac{2\Delta\Omega}{4\pi} \approx 15.92 \times 10^{-6}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{L} = \frac{N}{\sigma \Delta t \frac{\Delta\Omega}{4\pi}} = \frac{3}{3 \times 10^{-41}\,\mathrm{cm}^2 \times 31\,557\,600\,\mathrm{s} \times 15.92 \times 10^{-6}} \approx 1.99 \times 10^{38}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}.$$

Esercizio 2

Un fascio di pioni neutri di energia cinetica 2 GeV viene inviato verso un rivelatore costituito da 3 celle calorimetriche di sezione quadrate di lato L disposte come in figura. La linea di volo dei pioni passa al centro della cella intermedia. Ad una distanza $D = 1\,\mathrm{m}$ dalla faccia del rivelatore il pione decade in due fotoni, i cui angoli di emissione rispetto alla linea di volo del pione sono gli stessi ($\theta_1 = \theta_2$). Determinare il massimo valore di L per cui i due fotoni impattano sul rivelatore in due celle differenti.



Soluzione dell'esercizio 2

La conservazione dell'impulso nella direzione ortogonale al moto del π^0, p_π^y fornisce la relazione:

$$p_\pi^y = 0 = p_{\gamma 1}\sin\theta_1 - p_{\gamma 2}\sin\theta_2$$

se usiamo il dato fornitoci che $\theta_1 = \theta_2$ e che per i fotoni vale $E_\gamma = p_\gamma$, si ottiene che

$$0 = E_{\gamma 1}\sin\theta_1 - E_{\gamma 2}\sin\theta_1$$

e quindi $E_{\gamma 1} = E_{\gamma 2}$. Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$E_\pi = E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} = 2E_{\gamma 1}$$

e quindi:

$$E_{\gamma 1} = \frac{E_\pi}{2}$$

Dalla conservazione della massa invariante nel decadimento del pione si ha:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= E_\pi^2 - |\vec{p}_\pi|^2 = (E_{\gamma 1} + E_{\gamma 1})^2 + |\vec{p}_{\gamma 1} + \vec{p}_{\gamma 2}|^2 \\ &= 2E_{\gamma 1}E_{\gamma 2}(1-\cos\theta) \\ &= \frac{E_\pi^2}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $\theta = \theta_1 + \theta_2$ l'angolo di apertura dei due fotoni. Poiché $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, si ha:

$$m_\pi^2 = E_\pi^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

da cui:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta_1 = \frac{y}{2D}$$

dove y è la distanza dei punti di impatto dei due fotoni a una distanza D dal decadimento nella direzione trasversa al moto del pione che decade. Affinché i due fotoni vadano a finire in due celle distinte si deve avere che il lato della cella sia minore di y:

$$L < y = \frac{m_\pi}{E_\pi} \times 2D = \frac{m_\pi}{K_\pi + m_\pi} \times 2D = \frac{135\,\mathrm{MeV}}{2000\,\mathrm{MeV} + 135\,\mathrm{MeV}} \times 2\,\mathrm{m} = 12.6\,\mathrm{cm}$$

Un modo alternativo per ricavare l'angolo θ_1, in queste condizioni di decadimento simmetrico del π^0, è con considerazioni geometriche, dopo aver ricavato con la conservazione dell'energia, come sopra, che $p_{\gamma 1} = E_\pi/2$. Per conservare l'impulso, poiché la componente trasversale al moto dell'impulso dei due fotoni si annulla:

$$2p_{\gamma 1}\cos\theta_1 = p_{\pi^0} = \sqrt{E_{\pi^0}^2 - m_{\pi^0}^2} = 2131\,\mathrm{MeV}$$

da cui si ricava:

$$\cos\theta_1 = \frac{p_{\pi^0}}{2p_{\gamma 1}} = 0.9981$$

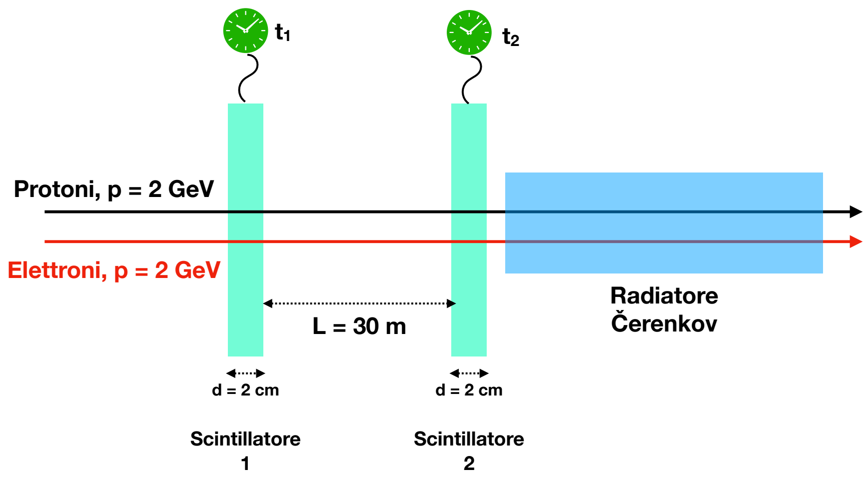
e quindi il valore massimo di L è:

$$L < 2D\tan\theta_1 = 2D\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = 2 \times 1\,\mathrm{m} \times \frac{0.0616}{0.9981} = 12.3\,\mathrm{cm}$$

la differenza numerica dovuta ad aver usato numeri approssimati sopra a 4 cifre decimali.

Esercizio 3

Un fascio contiene sia elettroni che protoni di impulso $p = 2\,\text{GeV}$, e attraversa due scintillatori di spessore $d = 2\,\text{cm}$ e di lunghezza di radiazione $X_0 = 20\,\text{cm}$ a una distanza $L = 30\,\text{m}$ l'uno dall'altro. Si considerino costanti le perdite di energia per ionizzazione negli scintillatori, e pari a $2\,\text{MeV/cm}$ per i protoni e $2.5\,\text{MeV/cm}$ per gli elettroni.



1. calcolare l'energia persa dalle due particelle in ciascuno dei due contatori
2. se si misura il tempo di attraversamento dei due scintillatori con un rivelatore che ha una risoluzione di 1 ns, si riesce a discriminare tra i due diversi tipi di particelle? (si trascuri l'energia persa nei rivelatori)
3. fornire dei possibili indice di rifrazione di un radiatore, posto dopo il secondo scintillatore, che permetta di distinguere i protoni dagli elettroni attraverso la rivelazione di luce Čerenkov.

Soluzione dell'esercizio 3

1. Il $\beta\gamma$ per i protoni di quell'energia vale:

$$\beta\gamma = \frac{p}{m} = \frac{2\,\text{GeV}}{0.938\,\text{GeV}} = 2.1,$$

quindi perdono energia solo per ionizzazione, mentre per gli elettroni bisogna tener conto anche dell'irraggiamento. Quindi l'energia persa dai due tipi di particella nell'attraversare il primo scintillatore di spessore d sarà:

$$\begin{aligned}
\Delta E_p &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}|_{p,ion} \times d = 2\,\text{MeV}\,\text{cm}^{-1} \times 2\,\text{cm} = 4\,\text{MeV} \\
\Delta E_e &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}|_{e,ion} \times d + E_{0,e}\left(1 - e^{-\frac{d}{X_0}}\right) = 2.5\,\text{MeV}\,\text{cm}^{-1} \times 2\,\text{cm} + 2.0\,\text{GeV} \times 0.095 \\
&= 5\,\text{MeV} + 190\,\text{MeV} \approx 195\,\text{MeV}
\end{aligned}$$

Nel secondo scintillatore i protoni perderanno altri $4\,\text{MeV}$. Per gli elettroni, bisogna considerare che $E'_{0,e} = 2000\,\text{MeV} - 195\,\text{MeV} = 1805\,\text{MeV}$, e quindi si otterrà:

$$\begin{aligned}
\Delta E_e(\text{scint. 2}) &= \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}|_{e,ion} \times d + E'_{0,e}\left(1 - e^{-\frac{d}{X_0}}\right) \\
&= 2.5\,\text{MeV}\,\text{cm}^{-1} \times 2\,\text{cm} + 1805\,\text{MeV} \times 0.095 = 5\,\text{MeV} + 172\,\text{MeV} = 177\,\text{MeV}
\end{aligned}$$

2. Se si trascura l'energia persa nel primo scintillatore, il tempo di volo tra i due rivelatori è dato da:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L}{\beta c} = \frac{LE}{cp}$$

per il protone con impulso p, l'energia è:

$$E_p = \sqrt{p^2 + m_p^2} \approx 2.21\,\text{GeV}$$

e quindi il tempo di volo sarà:

$$t_p = \frac{30\,\mathrm{m} \times 2.21\,\mathrm{GeV}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 2\,\mathrm{GeV}} = 1.1 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 110\,\mathrm{ns}$$

Per l'elettrone possiamo approssimare $\beta \approx 1$, e quindi:

$$t_e = \frac{L}{c} = \frac{30\,\mathrm{m}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{ns}$$

Quindi la differenza di tempi di volo tra le due particelle è:

$$\Delta T = t_e - t_p = 10\,\mathrm{ns}$$

Poiché la differenza di tempi di volo ΔT dei due tipi di particella è molto maggiore della risoluzione sperimentale: $\Delta T = 10\,\mathrm{ns} \gg \sigma_{\Delta T} = 1\,\mathrm{ns}$, si possono distinguere elettroni da protoni.

3. L'emissione di radiazione Čerenkov si ha quando la velocità della particella è superiore a quella della propagazione della luce nel mezzo, quindi quando

$$\beta > \frac{c}{n}$$

le velocità sono quelle usate nel punto precedente, $\beta_p = 0.905$ e $\beta_e = 1$, quindi si ha emissione di luce Čerenkov se l'indice di rifrazione é maggiore, rispettivamente per protoni ed elettroni, a:

$$\begin{aligned} n_p &> \frac{1}{\beta_p} = 1.11 \\ n_e &> \frac{1}{\beta_e} = 1.00 \end{aligned}$$

quindi per materiali con indice di rifrazione $1 < n < 1.11$ gli elettroni emetteranno luce Čerenkov, mentre i protoni no.

Part.	M [MeV/c^2]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	2.6 10^{-8}
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	1.2 10^{-8}
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	1.2 10^{-8}
K^0	497.6	1/2	-1/2	0^-	0	1	non definita
$\overline{K}^0$	497.6	1/2	1/2	0^-	0	-1	non definita
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
ρ^0	770	1	0	1^{--}	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^+	770	1	1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^-	770	1	-1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha(^4_2He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}
J/ψ	3096.9	0	0	1^{--}	0	0	7.2×10^{-21}

Tabella 1: Massa (M), isospin (I, e sua terza componente I_3), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media (τ) di diverse particelle adroniche.

Part.	M [MeV/c^2]	τ [s]
e^-	0.511	stabile
μ^-	105.6	2.2×10^{-6}
τ^-	1776	2.9×10^{-13}
$\nu_{e/\mu/\tau}$	0	stabile

Tabella 2: Massa (M) e vita media (τ) dei leptoni.

Costanti utili:

- $\hbar c = 197\,\mathrm{MeV\,fm}$
- costante di normalizzazione per $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ di ionizzazione: $C = 0.307$ MeV g^{-1} cm^2

Formule utili:

- Trasformazione dell'angolo polare tra laboratorio e centro di massa (asterisco), in funzione dei parametri del boost di Lorentz β e γ:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta^*)}{\gamma\left(\frac{\beta}{\beta^*} + \cos\theta^*\right)}$$