PREVIOUSLY ON FNSN

$|i\rangle \to |f\rangle$

$$\Gamma_{fi} = \underbrace{2\pi}_{\times \frac{1}{\hbar} \text{ se unità S.I.}} |T_{fi}|^2 \, \rho(E_i)$$

RATE DI TRANSIZIONE (PROB/TEMPO)

$\rho(E_i) \to$ DENSITA' DEGLI STATI ACCESSIBILI DATA E_i

REGOLA D'ORO DI FERMI

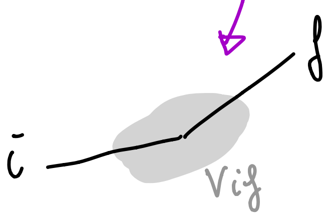
$\boxed{\text{SCOPO DI OGGI: calcolare } \Gamma_{fi}}$

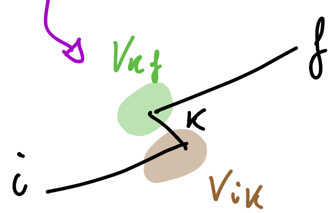
in TEORIA DELLE PERTURBAZIONI con $H = H_0 + V$

↳ indip. del tempo

$$T_{fi} \simeq \langle f|V|i\rangle + \sum_k \frac{\langle f|V|k\rangle\langle k|V|i\rangle}{E_i - E_k}$$

↑ al 2° ordine





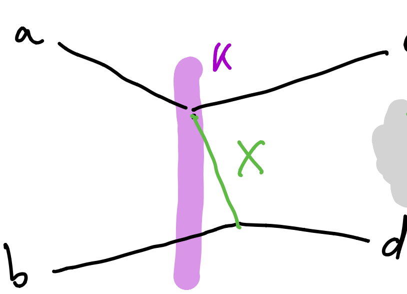
ma sono ancora interazioni a distanza!

⇓

le vedo così:

(ho due casi possibili)

CASO A

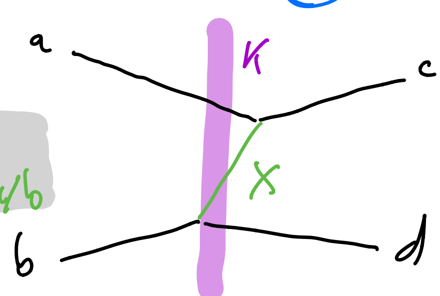


→ tempo

X scambia impulso con a/b

TIME-ORDERED PERTURBATION THEORY

CASO B



→ tempo

imponiamo $\langle f|V|i\rangle \equiv 0$

$i: a+b$

$k: X+c+b$

$f: c+d$

(bisogna di non avere azione a distanza)

$i: a+b$

$k: a+X+d$

$f: c+d$

assumiamo poi $\langle f|V|k\rangle$ e $\langle k|V|i\rangle$ siano uguali:

$$\langle f|V|k\rangle = \langle k|V|i\rangle \equiv g$$

COUPLING (ACCOPPIAMENTO delle mia interazione)

$$\sum_k \frac{\langle f|V|k\rangle\langle k|V|i\rangle}{E_i - E_k} = T_{fi} = T_{fi}^{(A)} + T_{fi}^{(B)}$$

$\Rightarrow$ NON POSSIAMO ASSUMERE $E_i = E_k$

$$T_{fi}^{(A)} = \frac{g^2}{E_A+E_B-E_X-E_C-E_B} = \frac{g^2}{E_A-E_X-E_C}$$

$$T_{fi}^{(B)} = \frac{g^2}{E_A+E_B-E_A-E_X-E_D} = \frac{g^2}{E_B-E_X-E_D}$$

usiamo l'unica conservazione dell'energia

$$E_A+E_B = E_C+E_D \Rightarrow E_B-E_D = E_C-E_A$$

$$T_{fi}^{(B)} = \frac{g^2}{E_C-E_A-E_X}$$

$$T_{fi} = T_{fi}^{(A)} + T_{fi}^{(B)} = g^2 \left[\frac{1}{E_A - E_X - E_C} + \frac{1}{E_C - E_A - E_X} \right]$$

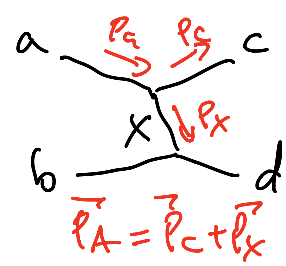
$$= g^2 \left[\frac{1}{(E_A - E_C) - E_X} - \frac{1}{(E_A - E_C) + E_X} \right]$$

$$= g^2 \cdot \frac{2E_X}{(E_A - E_C)^2 - E_X^2} = T_{fi}$$

assumiamo che valga $E_X^2 = m_X^2 + p_X^2$

cioè che la particella X sia ON-SHELL (cioè che $E = \sqrt{m^2 + p^2}$)

definisco $\underline{q} \equiv \underline{p_a} - \underline{p_c}$



$$E_X^2 = m_X^2 + (\vec{p}_A - \vec{p}_c)^2$$

usando $E_i^2 = m^2 + p^2$ ottengo

$$T_{fi} = \frac{2 E_X \, g^2}{|\underline{q}|^2 - m_X^2}$$

COUPLING (costante di accoppiamento)

PROPAGATORE DELL'INTERAZIONE

T_{fi} NON E' LORENTZ-INVARIANTE; DIVENTA LORENTZ-INVARIANTE SE NORMALIZZO ψ A $\sqrt{2E_X/V}$ INVECE DI $1/\sqrt{V}$

è insoddisfacente: non c'è conserv. dell'energia $\underbrace{\text{nello stato}}$ intermedio

o NEGLI stati intermedi... (ordini successivi)

Con la scusa che "$\Delta E \, \Delta t \geq \hbar/2$" consentirebbe una violazione dell'energia per Δt piccolo

TIME-ORDERED PERTURBATION THEORY

TOPT

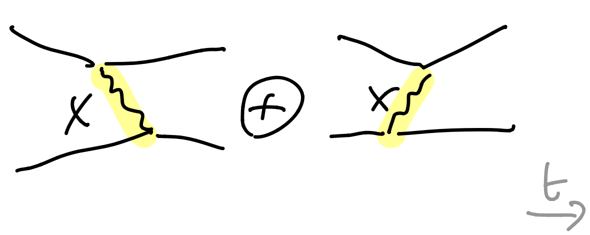
- rinuncio alla conservazione di E ai vertici
- ho un ordine temporale
- X è on shell (vale $E^2 = p^2 + m^2$)

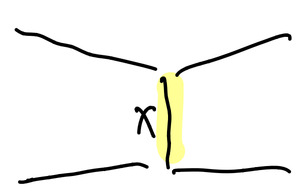
QUANTUM FIELD THEORY

QFT

- ripristino la conserv. di E e p in tutti i vertici
- non ho più, nel disegno, un ordine temporale
- X non è $\boxed{\text{on shell}}$

OFF SHELL = VIRTUALE





QFT spiega facilmente creazione/distruzione di particelle

che ci manca per avere Γ_{fi}?

LA DENSITA' DEGLI STATI $\rho(E_i)$

$$\Gamma_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

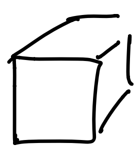
$\hbar$ se nel S.I.

particelle libere

$$\psi(x,t) = A\, e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$$

$$\int_V \psi^* \psi \, d^3x = 1$$

1 particella su un volume V



a

$$\int_V d^3x\, \psi^*\psi = 1 = |A|^2 \cdot V = a^3 |A|^2$$

↳ questo fissa la mia densità di particelle

$$A = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

condizioni periodiche al bordo

$$\psi(x+a, y, z) = \psi(x, y+a, z) = \psi(x, y, z+a) = \psi(x,y,z)$$

$$\psi(x+a, y, t) = \psi(x, y, t)$$

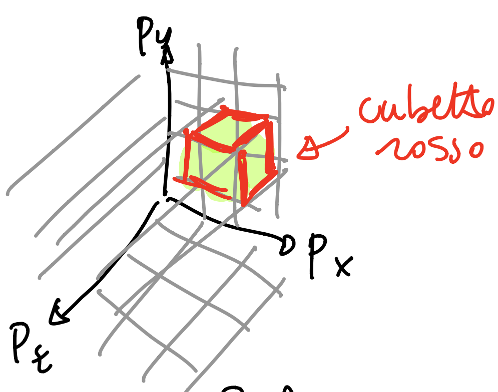
$$\psi = A e^{i(p x - E t)} \longrightarrow e^{i p(x+a)} = e^{i p x}$$

$$e^{ipx} e^{ipa} = e^{ipx}$$

$$p_x \cdot a = 2\pi \qquad e^{ipa} = 1$$

$$p_x = \frac{2\pi}{a} \cdot \underbrace{n_x}_{\text{INTERO}}$$

$\Longrightarrow$ l'impulso è QUANTIZZATO



quanti stati ho con

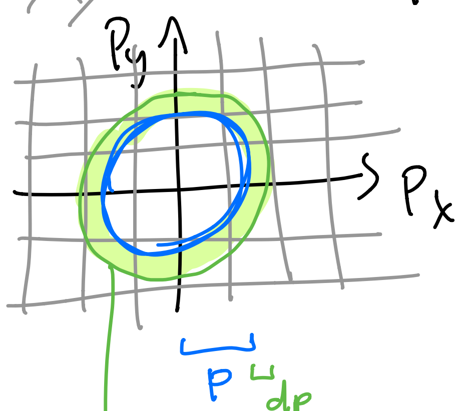
p "$\pm$" dP

o meglio

$p \in [p, p + dP]$

proietto sul piano xy

(MA SIAMO SEMPRE IN 3D, CIOÈ LA BLU È UNA SFERA!)



volume di un singolo stato (cubetto rosso)

$$\left(\frac{2\pi}{a}\right) \times \left(\frac{2\pi}{a}\right)\left(\frac{2\pi}{a}\right)$$

qui ho $$dn = \frac{\overbrace{4\pi p^2}^{\text{sferetta}} \overbrace{dp}^{\text{"altezza"}}}{(2\pi/a)^3}$$

$$dn = \frac{\text{volume nel guscio sferico in verde}}{\text{volume del singolo stato}}$$

$$\rho(E_i) = \left.\frac{dn}{dE_f}\right|_{E_f=E_i} = \underbrace{\frac{dn}{dp}}_{\substack{\text{contiamo gli stati}\\\text{accessibili con } p \text{ in}\\ [p, dp+p]}} \underbrace{\left|\frac{dp}{dE}\right|}_{\substack{\text{lega fra } p \text{ e } E\\ \text{nel mio problema}}}$$

nel caso di DECADIMENTO

① $A \to B + C$ $\quad m_B + m_C > m_D + m_E$

② $A \to D + E$

$\frac{dn}{dp} \propto p^2 \to$ vince (in termini di $\rho(E_i)$) il caso ②

NB $\quad \underbrace{\Gamma_{fi}}_{\substack{\text{ricordiamoci che}\\\text{la fisica (es. } \sigma)\\\text{non può dipendere}\\\text{dal volume } V}} = 2\pi \, |T_{fi}|^2 \, \underbrace{\rho(E_i)}_{\propto V}$

$\hookrightarrow |\underbrace{\langle f | V | i \rangle}_{\propto A^2 = \frac{1}{V}} + \ldots|^2$

$$\boxed{A \to B_1 + B_2 + \ldots B_N}$$

nello stato finale ho N particelle

"i" $\quad dn_i = \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \cdot \overbrace{V}^{a^3} = \frac{p^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dp}{(2\pi)^3} \cdot V$

$$dn = \prod_{i=1}^{N-1} dn_i = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\cdot V$$

CONSERVAZ. IMPULSO!

$$= (2\pi)^3 \prod_{i=1}^{N} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3}\, \delta^{(3)}\Big(\vec{p}_A - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\Big)\cdot V$$

ES

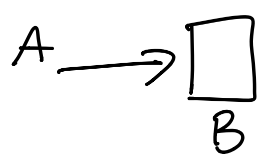
$A \to B_1 + B_2$

$E_A = 10 \text{ GeV}$

$\underbrace{E_{B_1}} + E_{B_2} = 10 \text{ GeV}$

una volta scelta E_{B_1}, $E_{B_2} = E_A - E_{B_1}$

SEZIONE D'URTO



$$\frac{dN_i}{dt} = \sigma \cdot \phi_A \cdot N_B$$

$$\phi_A = \frac{dN_A}{dt\,S} = \frac{dN_A \cdot dx}{dx\,dt\,S} = n_A v_A$$

$$N_B = n_B \cdot V$$

$$\sigma = \frac{dN_i/dt}{\phi_A N_B} = \frac{dN_i/dt}{n_A v_A \cdot n_B \cdot V}$$

uso il fatto che ψ è normalizzata su V

$$n_A = 1/V$$
$$n_B = 1/V$$

avevamo scelto ψ tale che ho 1 particella sul volume V

$$\sigma = \frac{dN_i/dt}{\frac{1}{V} \cdot v_A \cdot \frac{1}{\cancel{V}} \cdot \cancel{V}} = \frac{\Gamma_{if}}{\frac{1}{\cancel{V}} \cdot v_A}$$

"P" $/T$

$]\propto \frac{1}{\cancel{V}}$

SI PUO' FARE SENZA PERDITA DI GENERALITÀ ($V \equiv 1$)

$$= \frac{\Gamma_{if}}{v_A} = \frac{2\pi\, |T_{fi}|^2\, \rho(E_i)}{v_A}$$

DECADIMENTO

$$A \to B + C + \dots$$

Γ è la quantità misurata

$$= \frac{\text{decadimenti}}{\text{secondo}}$$

$$A \to B + C + \dots \qquad \Gamma_1$$

$$A \to \tilde{B} + \tilde{C} + \dots \qquad \Gamma_2$$

$$A \to \bar{B} + \bar{C} + \dots \qquad \Gamma_3$$

$$\vdots$$

$$\Gamma = \sum_{\substack{\text{su tutti} \\ \text{i CANALI DI DECADIMENTO}}} \Gamma_i$$

$\tau = \, ?$ tempo di decadimento di una particella

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar$$

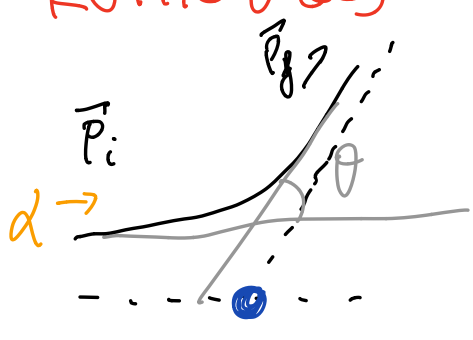
$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

$$\frac{\Gamma_i}{\Gamma} \equiv \text{BRANCHING RATIO}$$

	BR
es) $H \to \mu^+ \mu^-$	basso
$H \to \bar{b} + b$	70%
$H \to \gamma + \gamma$	2%

e altri

RUTHERFORD IN MQ



$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p$$

$$V = V(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

è non relativistico

$|i\rangle$ e $|f\rangle$ le assumo onde piane

(PARTICELLA LIBERA PRIMA E DOPO LO SCATT.)

$$\Gamma_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

calcolo $\rho = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \left|\frac{dp}{dE}\right|$

$$\frac{dn}{dp} = \frac{p^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{(2\pi)^3} \qquad (V=1)$$

$$E = \frac{p_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m}$$

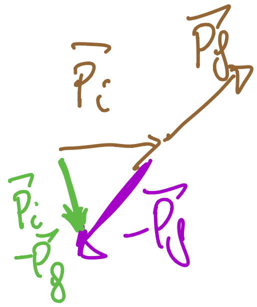
$$T_{fi} = \int_V d^3x \, \psi_f^*(x) \, V(r) \, \psi_i(x)$$

ONDA PIANA $\psi_i = e^{i(\vec{p}_i \vec{r} - E_i t)}$

$\psi_f = e^{i(\vec{p}_f \vec{r} - E_f t)}$

$H = H_0 + V$

$$= \frac{ze\,ze}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{+} dr \, r^2 \int_0^{2\pi} d\phi$$



$$\times \int_0^{\pi} \underbrace{\sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}}_{\text{angolo fra } \vec{r} \text{ e } \vec{p}_i - \vec{p}_f \equiv \vec{q}} \; e^{i\overbrace{(\vec{p}_i - \vec{p}_f)}^{\vec{q}}\cdot\vec{r}} \; e^{i(E_i - E_f)t}$$

$= 0$

$$\times \frac{1}{r}$$

$y = \cos\tilde{\theta}$

$dy = -\sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}$

$$= -\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} dr \cdot r\,(2\pi) \cdot \int_{-1}^{1} dy \cdot e^{i\boxed{q \cdot r \cdot y}}$$

$\vec{q} \cdot \vec{r} = qr\cos\tilde{\theta}$

$$= \;\cdots \int_0^{\infty} 2\sin(qr)\, dr$$

$= \text{MALE}$

devo definire $V(r) = \dfrac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r} \cdot e^{-mr}$

e poi mandare m a 0

$$T_{fi} = \lim_{m\to 0} -\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\cdot\int_0^{\infty} dr\, e^{-mr}\cdot r$$

$$\cdot\ \frac{1}{iqr}\cdot\left[e^{iqr} - e^{-iqr}\right]$$

$$= \lim_{m\to 0} -\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}(\cdot 2\pi)\cdot\int_0^{\infty} e^{-mr}\cdot$$

$$\cdot\ \frac{1}{iq}\cdot\left[e^{iqr} - e^{-iqr}\right] dr$$

$$\propto \lim_{m\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{e^{r(iq-m)}}{i\cdot(iq-m)} - \frac{e^{-r(iq+m)}}{i(-iq-m)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{m \to 0} \left[0 - \left(\frac{1}{iq - m} - \frac{-1}{iq + m} \right) \right]$$

$$= \lim_{m \to 0} \frac{q}{q^2 + m^2} = \frac{1}{q}$$

$m =$ "massa del fotone"

occhio: c'è un $\frac{1}{q}$ a moltiplicare che va rimesso (in fondo dei conti avevamo scritto $T_{fi} \propto$ qualcosa)

$$|T_{fi}| = 4\pi \cdot \underbrace{zZ}_{\text{COUPLING}} \alpha (\hbar c) \cdot \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{\text{PROPAGATORE}}$$

$$q^2 = (\vec{P}_i - \vec{P}_f)^2 = 2P_i^2 (1 - \cos\theta)$$

$$= 2\cdot(2mE)(1-\cos\theta)$$

$\frac{1-\cos\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$

$$= 8(mE)(\sin^2\theta/2)$$

Perciò:

$$\sigma = \frac{\Gamma_{fi}}{\phi_A} = \frac{2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)}{p/m}$$

$$\rho(E_i) = \frac{p^2 \overbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}^{dn/dp}}{(2\pi)^3} \cdot \overbrace{\frac{m}{p}}^{dp/dE}$$

$$= \frac{p^2 \cdot d\Omega}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{p}$$

e infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \cdot \frac{m}{p} \cdot \frac{p^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{m}{p}$$

$$\times (4\pi)^2 z^2 Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 \left| \frac{1}{\underbrace{8(mE)\sin^2\theta/2}_{q^2}} \right|^2$$

$$= \frac{(\alpha z Z \hbar c)^2}{16 \cdot E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

che è esattamente il calcolo classico!

(NB: E = ENERGIA CINETICA) visto che abbiamo usato $E = p^2/2m$