

FNSN1: esercitazioni

Valerio Ippolito

18 maggio 2023

1 Cinematica

1.1 Trasformazioni di Galileo

1.1.1 Trasformazione delle coordinate

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1)$$

Le equazioni (1) (*trasformazioni di Galileo*) si fondano sull'invarianza, nel cambio di sistema di riferimento, della coordinata temporale. Secondo la meccanica classica, l'intervallo temporale fra due eventi ha sempre la stessa lunghezza, che sia misurato dall'osservatore in O o da quello in O' : il concetto di simultaneità di due eventi ha, in meccanica classica, un valore assoluto.

1.1.2 Trasformazione delle velocità

Se un corpo che si trova in P è in moto, la sua velocità - un vettore a tre dimensioni - nel sistema di riferimento O avrà coordinate $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, dove

$$\begin{aligned} v_x &\equiv \frac{dx}{dt}, \\ v_y &\equiv \frac{dy}{dt}, \\ v_z &\equiv \frac{dz}{dt}, \end{aligned}$$

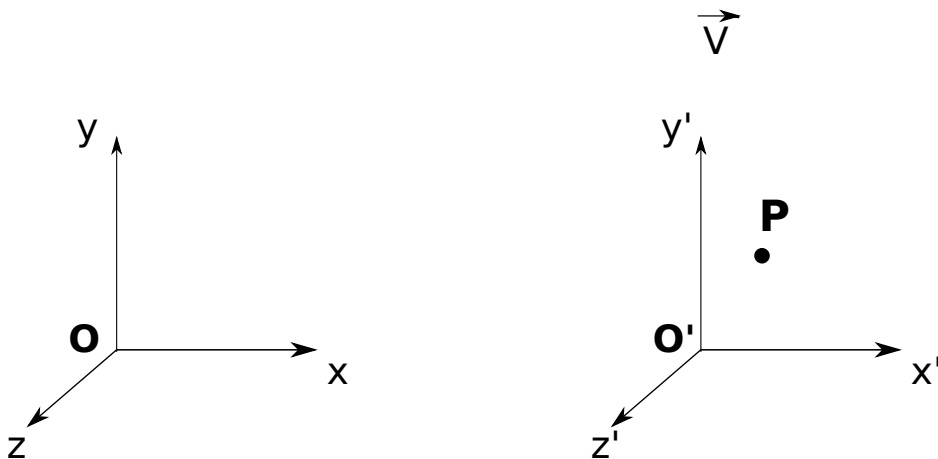


Figura 1: Sistemi di riferimento O ed O' , in moto relativo fra loro. Senza perdita di generalità, seguiremo la convenzione per cui O è fermo ed O' si muove rispetto ad O con velocità \mathbf{V} parallela all'asse x . Un evento che ha luogo nel punto P al tempo t avrà coordinate (t, x, y, z) nel riferimento O e (t', x', y', z') nel riferimento O' .

mentre nel sistema di riferimento in moto, O' , avrà coordinate¹

$$\begin{aligned}v'_x &\equiv \frac{dx'}{dt'}, \\v'_y &\equiv \frac{dy'}{dt'}, \\v'_z &\equiv \frac{dz'}{dt'}.\end{aligned}$$

Se partiamo dall'equazione 1 e passiamo ai differenziali, e ricordiamo che V è costante per ipotesi², otteniamo

$$\begin{cases}dt' = dt \\dx' = dx - V dt \\dy' = dy \\dz' = dz\end{cases}$$

e dividendo per dt' si ottiene la legge di trasformazione delle velocità:

$$\begin{cases}v'_x = v_x - V_x \\v'_y = v_y \\v'_z = v_z\end{cases} \quad (2)$$

1.2 L'esperimento di Michelson

La fine del diciannovesimo secolo è stata segnata, dal punto di vista della fisica, dallo straordinario successo delle equazioni di Maxwell nello spiegare i fenomeni ondulatori ed elettromagnetici. Le equazioni "funzionavano" in maniera eccezionale, ma non sembravano obbedire al principio di relatività: le equazioni di Maxwell, infatti, non sono covarianti sotto trasformazioni di Galileo, cioè la descrizione dei fenomeni ondulatori ed elettromagnetici sembrava dipendere dal sistema di riferimento in cui ci si trovava. Inoltre, era credenza comune che la propagazione delle onde elettromagnetiche dovesse avvenire - al pari ad esempio delle onde meccaniche - sempre attraverso un mezzo fisico: una sostanza misteriosa e impalpabile, chiamata *etere luminifero*, che avrebbe permeato tutto l'universo. La Terra, che ruota attorno al Sole con una velocità di circa 30 km/s, si sarebbe dunque mossa in questo sistema di riferimento, e dalla Terra si sarebbe dovuto osservare un "vento d'etere" con la stessa direzione del moto di rivoluzione terrestre e verso opposto.

Nel 1881, Albert A. Michelson e Edward W. Morley³ costruiscono un esperimento per misurare questo vento d'etere. L'apparato sperimentale, detto *interferometro di Michelson*, è mostrato in figura 2. L'apparato è chiaramente solidale con la Terra, che si muove - nel sistema di riferimento dell'etere - con una velocità \mathbf{v}_T lungo l'asse orizzontale, rivolto verso destra. Un fascio di luce viene inviato parallelamente a quest'asse, e raggiunge uno specchio semiriflettente (una lastra di vetro che trasmette metà della luce incidente e riflette l'altra metà), posto nella posizione A . Lungo le direzioni parallela e ortogonale a \mathbf{v}_T , a una distanza L da A , sono posti due specchi ordinari, rispettivamente B e C : la luce che attraversa questi due bracci dell'interferometro (AB e AC) viene riflessa verso A e raggiunge infine uno schermo. Lo scopo dello schermo è osservare l'eventuale interferenza fra i due cammini luminosi: se la luce arrivasse sullo schermo in tempi diversi, i due fasci sarebbero fuori fase e si osserverebbero frange di interferenza.

Quanto tempo impiegano dunque i due fasci luminosi a percorrere i cammini parallelo (ABA) e ortogonale (ACA) alla direzione del moto della Terra nel riferimento dell'etere? Indichiamo con c la velocità che avrebbe la luce se la Terra fosse ferma (che poi è anche la velocità che ha la luce nella direzione ortogonale a \mathbf{v}_T). Se vale la legge di composizione delle velocità di Galileo, equazione (2), e indichiamo con t_{\parallel} e t_{\perp} i tempi impiegati dalla luce a percorrere i due cammini, si ha che

$$\begin{aligned}t_{\parallel} &= t_{AB} + t_{BA} = \frac{L}{c + v_T} + \frac{L}{c - v_T} = \frac{Lc - Lv_T + Lc + Lv_T}{(c + v_T)(c - v_T)} \\&= \frac{2Lc}{c^2 - v_T^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}, \\t_{\perp} &= 2t_{AC'} = 2 \cdot \frac{\sqrt{(L)^2 + (v_T t_{AC'})^2}}{c} \Rightarrow t_{\perp} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}},\end{aligned}$$

¹La definizione di velocità che dà un osservatore solidale con O e quella che dà un osservatore solidale con O' hanno la stessa forma: ciascuno deriva lo spostamento spaziale da lui misurato per l'intervallo temporale da lui misurato.

²I sistemi di riferimento sono in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro - sono cioè sistemi di riferimento inerziali.

³L'articolo originale, in inglese, è disponibile su http://personal.psu.edu/rq9/H0W/Michelson_Morley_Experiment.pdf.

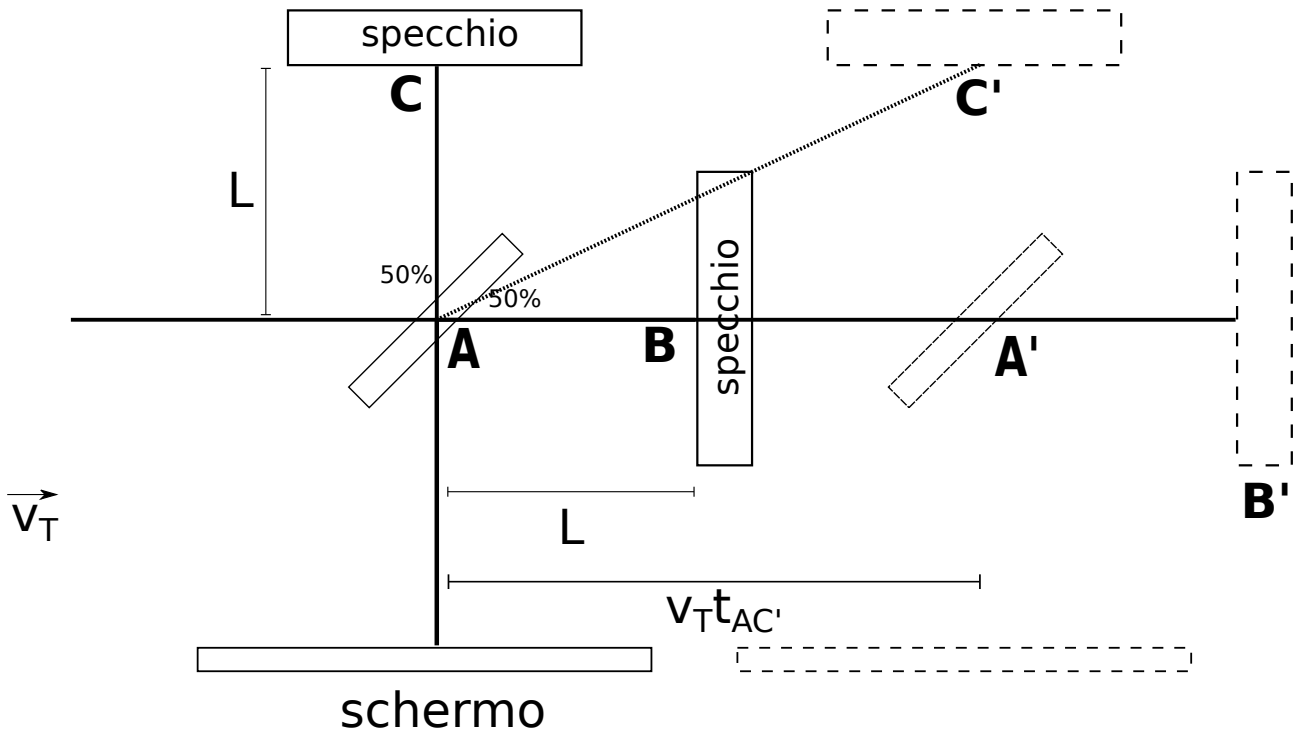


Figura 2: Schematizzazione dell'interferometro di Michelson, visto dal sistema di riferimento dell'etere. L'apparato sperimentale si muove lungo l'asse orizzontale con velocità v_T , pari alla velocità della Terra rispetto all'etere. Il fascio di luce, che proviene da sinistra, raggiunge uno specchio semiriflettente (A), ovvero uno specchio in cui metà della luce incidente prosegue il suo cammino, e metà viene riflessa verso l'alto, ortogonalmente. I due bracci dell'interferometro, AB e BC , hanno lunghezza identica L , e terminano con uno specchio che manda la luce di nuovo in A : la luce così riflessa viene raccolta da uno schermo, in cui vengono osservate le frange di interferenza fra i due fasci di luce. Poiché il sistema si sposta verso destra, il fascio di luce riflesso in A (cioè quello che va verso l'alto) raggiungerà lo specchio C dopo un tempo $t_{AC'}$ in cui lo stesso specchio si sarà spostato verso destra, di una lunghezza $v_T t_{AC'}$, e seguirà dunque il cammino "diagonale" AC' di lunghezza $\sqrt{(A'C')^2 + (AA')^2} = \sqrt{L^2 + (v_T t_{AC'})^2}$. La posizione dell'apparato sperimentale dopo questo tempo è rappresentata con linee tratteggiate.

ovvero i due cammini dovrebbero essere percorsi in tempi diversi, e si dovrebbero osservare frange di interferenza. Nel calcolare t_{\parallel} , abbiamo usato il fatto che - secondo la fisica classica - la velocità della luce prodotta da un esperimento sulla Terra è, per un osservatore solidale con l'etere, maggiore se la luce è emessa in verso concorde al moto della Terra rispetto all'osservatore, e minore se emessa in verso opposto. Nel calcolare t_{\perp} , invece, abbiamo usato il fatto che il tragitto da A allo specchio C è verticale solamente se $\mathbf{v}_T = 0$: in generale, la luce segue una traiettoria diagonale, a causa dello spostamento della Terra (e quindi dell'interferometro) rispetto all'etere.⁴

Poiché è difficile costruire i due bracci dell'interferometro di lunghezze perfettamente identiche, Michelson e Morley ingegnosamente ripetono la misura dopo aver ruotato l'apparato sperimentale (scambiando così fra loro i due bracci parallelo e ortogonale al moto della Terra), e si aspettano di misurare *spostamenti* delle frange di interferenza dopo la rotazione dell'apparato. Ma non li trovano: sorprendentemente, la luce sembra impiegare lo stesso tempo per percorrere i due cammini. Da un certo punto di vista l'esperimento fallisce nel suo scopo originario, ma il risultato sperimentale è sorprendente: la velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni sistema di riferimento. Un esperimento nato per misurare il vento d'etere porta la fisica moderna a mettere in discussione non solo l'esistenza dell'etere, ma proprio l'impianto relativistico galileiano su cui la fisica dell'epoca si fondava.

1.3 Trasformazioni di Lorentz

1.3.1 Trasformazione delle coordinate

Le leggi della relatività speciale si possono ricavare partendo da tre semplici principi, ispirati dall'evidenza sperimentale:

- la velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in ogni sistema di riferimento;
- isotropia dello spazio e del tempo: non esistono punti dello spazio o istanti di tempo privilegiati;
- omogeneità dello spazio: non esistono direzioni privilegiate.

Una trattazione elegante ed esaustiva è data da Lev D. Landau e Evgenij M. Lifšits in *Fisica Teorica 2. Teoria dei campi.*, capitolo 1, paragrafi 1-5.

In relatività speciale, le trasformazioni di Galileo sono sostituite dalle trasformazioni di Lorentz. Consideriamo sempre due sistemi di riferimento come in figura 1, O e O' , e indichiamo con V la velocità di O' rispetto ad O . Definiamo le quantità

$$\beta \equiv \frac{V}{c}, \quad (3)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4)$$

dove $\beta \leq 1$ e $\gamma \geq 1$. La coordinata di un evento rispetto al sistema di riferimento in moto, O' , è espressa in funzione delle coordinate misurate in O tramite le *trasformazioni di Lorentz*

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta \gamma x \\ x' = -\beta \gamma ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (5)$$

Per ragioni di praticità che saranno più evidenti a breve, è più comodo esprimere la coordinata temporale in termini di ct (ct'), invece di t (t'). Ciascuna delle quattro equazioni (5) ha così le dimensioni di una lunghezza.

Nel limite di basse velocità, ovvero $\beta = V/c \rightarrow 0$, espandendo in serie di Taylor, si ha

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{V}{c} \approx 0, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}, \\ \beta\gamma &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx \beta, \end{aligned}$$

⁴Si noti come abbiamo usato solamente le trasformazioni di Galileo e il concetto di distanza nel piano euclideo, per arrivare a questo risultato.

per cui, fermandoci al prim'ordine in β , l'equazione (5) diventa

$$\begin{cases} ct' \approx ct - \frac{V}{c}x \rightarrow t' = t - \frac{V}{c^2}x \\ x' \approx x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

1.3.2 Trasformazione delle velocità

Come trasformano le velocità in relatività speciale? Chiediamocelo con un esercizio, ambientato in un futuro ipotetico e implausibile, in cui non solo l'umanità non si è ancora estinta ma le automobili sono *molto* veloci.

Esercizio 1 Inseguimento a velocità smodata

Un evaso dal carcere interstellare di Andromeda sfugge alla prigionia a bordo di un'automobile avveniristica che viaggia a una velocità $\frac{3}{4}c$. L'auto della polizia che lo insegue viaggia a $\frac{1}{2}c$, e spara un proiettile che viaggia - rispetto all'auto della polizia - a $\frac{1}{3}c$. Il proiettile raggiunge l'evaso, secondo la fisica classica? E secondo la relatività speciale?

Soluzione dell'esercizio 1

Assumendo che la mira degli inseguitori sia perfetta, la sopravvivenza dell'evaso è una questione di velocità relativa - calcolata in un determinato sistema di riferimento - fra proiettile e auto dell'evaso: vince il più veloce fra i due. Proviamo a calcolare la velocità del proiettile nel sistema di riferimento del laboratorio, e a confrontarla con quella dell'auto dell'evaso.

Secondo la fisica classica, la velocità del proiettile nel riferimento del laboratorio è la somma della velocità dell'auto nel laboratorio e della velocità del proiettile nel riferimento dell'auto:

$$v_{\text{proiettile}}^{(\text{lab})} = v_{\text{auto}}^{(\text{lab})} + v_{\text{proiettile}}^{(\text{auto})} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c = \frac{10}{12}c.$$

Poiché $v_{\text{evaso}}^{(\text{lab})} = \frac{3}{4}c = \frac{9}{12}c < v_{\text{proiettile}}^{(\text{lab})}$, l'evaso viene colpito e il Bene trionfa.

Sfortunatamente per le forze dell'ordine, in relatività speciale le cose vanno in maniera diversa. Il problema è ottenere le leggi di trasformazione della velocità lungo la direzione del moto, che assumiamo essere x , nel passaggio dal sistema di riferimento dell'auto degli inseguitori a quello del laboratorio. Usiamo il fatto che la velocità lungo una certa direzione x è, in ciascun sistema di riferimento, naturalmente definita come il rapporto fra l'infinitesimo dx e dt . Partiamo dalle trasformazioni di Lorentz che ci danno le coordinate di un punto dello spazio-tempo, nel riferimento del laboratorio, date le sue coordinate in un riferimento in moto lungo l'asse x rispetto al riferimento del laboratorio: dobbiamo solo invertire il segno di V (cioè di β) nell'equazione (5), ottenendo

$$\begin{cases} ct = \gamma ct' + \beta \gamma x' \\ x = \beta \gamma ct' + \gamma x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Passando agli infinitesimi,

$$\begin{cases} c dt = \gamma c dt' + \beta \gamma dx' \\ dx = \beta \gamma c dt' + \gamma dx' \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases}$$

e poi dividiamo le tre componenti spaziali per $dt = \frac{c}{c} dt'$:

$$\begin{cases} v_x \equiv \frac{dx}{dt} = c \frac{\beta \gamma c dt' + \gamma dx'}{\gamma c dt' + \beta \gamma dx'} = c \frac{\beta c dt' + dx'}{c dt' + \beta dx'} \\ v_y \equiv \frac{dy}{dt} = c \frac{dy'}{\gamma c dt' + \beta \gamma dx'} \\ v_z \equiv \frac{dz}{dt} = c \frac{dz'}{\gamma c dt' + \beta \gamma dx'} \end{cases}$$

Per ciascuna delle tre componenti, dividiamo numeratore e denominatore per dt' , sostituendo $dx'/dt' = v'_x$ eccetera, ed esplicitiamo $\beta = V/c$, dove V è la velocità del "vecchio" sistema di riferimento (nel nostro caso, l'auto degli inseguitori) nel "nuovo" sistema di riferimento (nel nostro caso, il laboratorio):

$$\begin{cases} v_x = c \frac{V + v'_x}{c dt' + \frac{V}{c} v'_x} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c} \frac{v'_x}{c}} \\ v_y = c \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{c + \beta v'_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 + \frac{V}{c} \frac{v'_x}{c}} \\ v_z = c \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{c + \beta v'_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 + \frac{V}{c} \frac{v'_x}{c}} \end{cases} \quad (6)$$

Si noti come dalle equazioni (6) segue l'insuperabilità della velocità della luce.

Focalizziamoci sulla direzione in cui viaggiano fuggitivo e inseguitori, x , ed esplicitiamo il sistema di riferimento nella notazione:

$$v_{\text{proiettile}}^{(\text{lab})} = \frac{v_{\text{proiettile}}^{(\text{auto})} + v_{\text{auto}}^{(\text{lab})}}{1 + \frac{v_{\text{proiettile}}^{(\text{auto})} v_{\text{auto}}^{(\text{lab})}}{c^2}} = \frac{\frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{3} \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}c}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{5}{7}c < v_{\text{proiettile}}^{(\text{lab})},$$

cioè il proiettile non raggiunge il fuggitivo, che la fa franca.

1.3.3 Dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

Esercizio 2 Dilatazione dei tempi

A che velocità costante deve andare una navicella spaziale che, dal centro della Via Lattea (il cui raggio è 100000 anni luce), volesse raggiungerne l'estremità in 100 anni (tempo proprio)?

Soluzione dell'esercizio 2

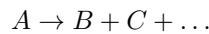
Per un osservatore solidale con la galassia, la navicella viaggia a velocità $v = \beta c$ e raggiunge l'estremità della galassia in $t = t_0 \gamma$ anni, dove $t_0 = 100$ anni. Se indichiamo con $r = ct_{\text{equiv}} = 100000c$ anni il raggio della galassia,

$$r = \beta ct = \beta \gamma ct_0 \rightarrow \beta \gamma = \frac{v}{c} = \frac{r}{ct_0} \equiv \lambda \approx \frac{100000c \text{ anni}}{100c \text{ anni}} = 1000,$$

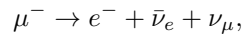
per cui

$$v = c \sqrt{\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}} \approx 0.9999995c.$$

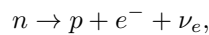
Intermezzo: legge del decadimento radioattivo Alcuni nuclei atomici, così come la maggior parte delle particelle, sono soggetti a processi di *decadimento* spontaneo – ovvero, a processi del tipo



in cui A decade in almeno due specie di natura diversa da A . Due esempi tipici sono il decadimento del muone



dove il muone decade in un elettrone, un neutrino elettronico e un neutrino muonico, e il decadimento β



in cui il neutrone decade in protone, elettrone e neutrino elettronico.

I decadimenti sono processi stocastici: non è cioè possibile predire istante per istante se una particella A sarà decaduta in $B + C$, ma è solo possibile dire che *in media* il numero di particelle della specie A , che chiameremo N , dopo un tempo dt si sarà ridotto di un infinitesimo dN , proporzionale al numero di particelle presenti al tempo 0: in formule,

$$dN = -\alpha N dt. \quad (7)$$

L'equazione (7) è una equazione differenziale, che ha soluzione

$$\frac{dN}{N} = -\alpha N dt,$$

$$N = N_0 \exp(-\alpha t) \equiv N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

dove abbiamo definito il tempo di decadimento $\tau = 1/\alpha$.

Talvolta si considera il tempo di *dimezzamento*, definito come il tempo dopo il quale una specie si è ridotta di metà: dalla (7), questo avviene al tempo $t_{1/2}$ definito dalla relazione

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{t_{1/2}}{\tau}\right),$$

da cui⁵

$$t_{1/2} = \tau \log 2.$$

⁵Per log intendiamo il logaritmo naturale, in base e .

Esercizio 3 Decadimento e relatività speciale

Un muone (particella di vita media 2.2×10^{-6} s) è prodotto a 8000 m di altezza con $v = 0.998c$. Arriva a terra secondo la meccanica classica? E secondo la relatività speciale?

I muoni sono anche prodotti dal decadimento di pioni in muoni e neutrini, $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ e $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. I pioni (particelle di vita media 2.6×10^{-8} s) a loro volta provengono da reazioni come

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-,$$

dove un protone dello stato iniziale viene dallo spazio, e uno viene dall'atmosfera. Se i pioni sono stati prodotti nello stesso punto dei muoni, arrivano a terra?

Soluzione dell'esercizio 3

Indichiamo con τ la vita media propria (ovvero la vita media delle particelle nel loro sistema di riferimento). Dalla dilatazione dei tempi, sappiamo che questo tempo sembrerà più lungo a chi si trova a terra di un fattore γ (sarà cioè $\tau_{\text{Terra}} = \gamma\tau$). Il muone, che ha $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 15$, viaggia

- secondo la meccanica classica, per una distanza media $v\tau = \beta c\tau \approx 658$ m,
- secondo la relatività speciale, per una distanza media $v\gamma\tau = \beta\gamma c\tau \approx 10$ km,

quindi solo la relatività rende giustizia del fatto che effettivamente sulla terra osserviamo muoni prodotti dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera⁶. Quanti, rispetto a quelli prodotti nell'atmosfera? Una frazione

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{Terra}}}\right) = \exp\left(-\frac{vt}{v\tau_{\text{Terra}}}\right) = \exp\left(-\frac{8000 \text{ m}}{\beta c\gamma\tau}\right) \approx 0.46,$$

ovvero circa il 46% dei muoni arriva a terra (o: la probabilità di un muone di arrivare a terra è del 46%).

Nel caso dei pioni, si ha invece $\beta\gamma c\tau \approx 123$ m, cioè praticamente tutti i pioni sono decaduti prima di arrivare a terra.

1.4 Cinematica delle particelle

1.4.1 Energia e impulso

Dal principio di minima azione per una particella libera, la cui lagrangiana si ricava dal confronto con il limite non relativistico⁷, si ottiene che

$$\begin{aligned} p &= m\gamma v, \\ E &= m\gamma c^2. \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{pc}{E}, \\ \gamma &= \frac{E}{mc^2}, \\ \beta\gamma &= \frac{p}{mc}. \end{aligned}$$

L'energia cinetica T si definisce, analogamente al caso classico, come la differenza fra l'energia totale di una particella e la sua energia a riposo (cioè quando $v = 0$):

$$E = m\gamma c^2 \equiv mc^2 + T \rightarrow T = m(\gamma - 1)c^2.$$

Una particella di massa nulla⁸ viaggia alla velocità della luce ($v = c$), e ha per costruzione

$$E = m\gamma c^2 = (m\gamma c)c = pc.$$

Esercizio 4 Lavoro e velocità prossime a c

Quanto lavoro bisogna compiere per aumentare la velocità di un elettrone

⁶Un esempio lo trovate su <https://www.youtube.com/watch?v=SnKvtazt5So>. Fun fact: senza i muoni, non si sarebbe mai scoperta una camera segreta della piramide di Cheope (<https://www.nature.com/articles/nature24647>)

⁷Si veda ad esempio Lev D. Landau e Evgenij M. Lifšits, *Fisica Teorica 2. Teoria dei campi.*, capitolo 2, paragrafi 8-9

⁸L'esempio più banale di particella di massa nulla è il fotone. Anche i gluoni, che sono i mediatori dell'interazione forte, sono considerate particelle di massa nulla. Spesso nei nostri esercizi considereremo anche i neutrini, ν_e, ν_μ e ν_τ (e le loro antiparticelle $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ e $\bar{\nu}_\tau$) come particelle di massa nulla, nonostante abbiano masse al momento ignote ma inferiori all'eV/c².

1. da $0.18c$ a $0.19c$?

2. da $0.98c$ a $0.99c$?

Si noti che nei due casi l'aumento di velocità è sempre $0.01c$.

Soluzione dell'esercizio 4

L'energia passerà da

$$E_i = m\gamma_i c^2 = m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} c^2$$

a

$$E_f = m\gamma_f c^2 = m \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_f^2}{c^2}}} c^2 = L + E_i.$$

Sapendo che la massa dell'elettrone è di $511 \text{ keV}/c^2$, il lavoro necessario, $L = E_f - E_i$, vale quindi

- $L \approx 1 \text{ keV}$,
- $L \approx 1.3 \text{ MeV}$.

Si noti come il lavoro necessario aumenta, a parità di Δv , avvicinandosi alla velocità della luce.

1.4.2 Quadrivettori e notazione di Einstein

Esercizio 5 Quadrivettori

Dati due quadrivettori contravarianti

$$\begin{aligned} a^\mu &= (3, 4, 1, 2), \\ b^\mu &= (5, 0, 3, 4), \end{aligned}$$

Si esprimano anzitutto i quadrivettori in forma covariante. Si calcolino poi norma e prodotto scalare dei quadrivettori e delle rispettive componenti spaziali. I quadrivettori sono di tipo spazio, tempo o luce?

Soluzione dell'esercizio 5

Ricordando che le componenti contravarianti di un quadrivettore \mathbf{x} si scrivono

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \mathbf{x})$$

si ha

$$\begin{aligned} a_\mu &= g_{\mu\nu} a^\nu = (3, -4, -1, -2), \\ b_\mu &= (5, 0, -3, -4), \\ \underline{a}^2 &= a_\mu a^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = 3^2 - 4^2 - 1^2 - 2^2 = -12, \\ \underline{b}^2 &= 5^2 - 0^2 - 3^2 - 4^2 = 0, \\ \underline{a} \cdot \underline{b} &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 0 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 4, \\ |\mathbf{a}|^2 &= 4^2 + 1^2 + 2^2 = 21, \\ |\mathbf{b}|^2 &= 0^2 + 3^2 + 4^2 = 25, \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11. \end{aligned}$$

1.4.3 Quadrimpulso

Energia e impulso di una particella sono le componenti di un quadrivettore che trasforma secondo le equazioni di Lorentz,

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right).$$

La norma del quadrimpulso è un invariante relativistico, infatti

$$\begin{aligned} \underline{p}^2 &= p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p_\mu p^\nu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{(m\gamma c^2)^2}{c^2} - (m\gamma v)^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m^2 c^2 (1 - \beta^2)^{-1} (1 - \beta^2) = m^2 c^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo espresso il modulo dell'impulso spaziale con il simbolo $p \equiv |\mathbf{p}|$.

1.5 Cinematica delle interazioni

1.5.1 Cinematica di un decadimento

Fissato un sistema di riferimento, dall'isotropia dello spazio e del tempo e dall'omogeneità dello spazio segue che, nel passaggio da uno stato iniziale con N particelle a uno stato finale con N' particelle,

$$A + B + C + D + \dots \rightarrow A' + B' + C' + D' + \dots,$$

si conservano l'energia e l'impulso totale, definiti come

$$E_{\text{tot}} \equiv \sum_{j=1}^N E_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{N'} E_f^{(j)},$$

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} \equiv \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{N'} \mathbf{p}_f^{(j)},$$

dove $E_i^{(j)}$ e $E_f^{(j)}$ rappresentano l'energia della particella j -esima rispettivamente nello stato iniziale e nello stato finale, e $\mathbf{p}_i^{(j)}$ e $\mathbf{p}_f^{(j)}$ il suo impulso spaziale.

Dalla definizione di quadrimpulso segue banalmente che anche i quadrimpulsi totali si conservano:

$$\underline{p}_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N \underline{p}_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{N'} \underline{p}_f^{(j)}. \quad (8)$$

È importante sottolineare che questa legge di conservazione è vera in ciascun sistema di riferimento inerziale, ma che i valori numerici di energia e impulso (cioè le coordinate del quadrimpulso) non sono invarianti di Lorentz: sotto trasformazione di Lorentz, infatti, per costruzione le componenti di un quadrimpulso (e quindi anche del quadrimpulso totale!) trasformano secondo

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu},$$

dove l'apice indica le coordinate del quadrivettore contravariante misurate in un sistema di riferimento che si muove rispetto al sistema del laboratorio. Se questo moto avviene lungo l'asse x con velocità $V = \beta c$, la relazione è la consueta

$$\begin{cases} E'/c &= \gamma E/c - \beta \gamma p_x, \\ p'_x &= -\beta \gamma E/c + \gamma p_x, \\ p'_y &= p_y, \\ p'_z &= p_z. \end{cases}$$

In generale, quindi, il quadrimpulso totale è una grandezza conservata, ma non è un invariante relativistico. Sono invece sia conservati che invarianti i prodotti scalari fra quadrimpulsi,

$$\underline{a} \cdot \underline{b},$$

e in particolare la loro norma,

$$\underline{a}^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = m_a^2 c^2.$$

Esercizio 6 Decadimento e relatività speciale

Un pione decade a riposo in un muone e un neutrino, tramite il processo

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_{\mu}.$$

In media, che distanza percorre il muone nel riferimento del laboratorio?

Il muone è una particella di massa $m_{\mu} = 105.6 \text{ MeV}/c^2$ e vita media $\tau_{\mu} = 2.2 \mu\text{s}$. Il pione carico è una particella di massa $m_{\pi} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$, mentre il neutrino è una particella che per i nostri scopi consideriamo di massa nulla.

Soluzione dell'esercizio 6

Nel sistema del laboratorio, il muone viaggia in media una distanza

$$L = vt = (\beta c)(\gamma \tau_{\mu}) = (\beta \gamma) c \tau_{\mu} = \frac{p_{\mu}}{m_{\mu} c} c \tau_{\mu} = \frac{p_{\mu}}{m_{\mu}} \tau_{\mu},$$

dove abbiamo usato la dilatazione dei tempi e la relazione fra energia, impulso, β e γ , e abbiamo indicato con p_{μ} il modulo dell'impulso spaziale del muone nel riferimento del laboratorio, \mathbf{p}_{μ} .

Per rispondere alla domanda del problema, cioè per calcolare L , dobbiamo quindi calcolare p_μ . Per farlo abbiamo due modi. Il primo è scrivere esplicitamente la legge di conservazione, prima e dopo il decadimento, di energia e impulso calcolati nel riferimento del laboratorio:

$$\begin{aligned} E_\pi &= E_\mu + E_\nu, \\ \mathbf{p}_\pi &= \mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu, \end{aligned}$$

Dal fatto che il pione per ipotesi decade fermo, $\mathbf{p}_\pi = \mathbf{0}$, segue che

$$\mathbf{p}_\nu = -\mathbf{p}_\mu,$$

cioè muone e neutrino hanno impulsi uguali in modulo e direzione ma di verso opposto. Inoltre, osserviamo che

$$E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2} = m_\pi c^2.$$

Usando la dipendenza dell'energia del muone dal suo impulso,

$$E_\mu = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2},$$

e quella del neutrino, per il quale – avendo massa nulla, e in virtù della conservazione dell'impulso – vale

$$E_\nu = p_\nu c = p_\mu c,$$

otteniamo che

$$E_\pi = m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2} + p_\mu c.$$

Il modo più furbo per risolvere quest'equazione in p_μ è isolare la radice quadrata,

$$m_\pi c^2 - p_\mu c = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2},$$

elevare al quadrato,

$$m_\pi^2 c^4 + p_\mu^2 c^2 - 2m_\pi p_\mu c^3 = m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2,$$

da cui segue naturalmente che

$$p_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c.$$

L'energia del muone si ricava da $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$:

$$\begin{aligned} E_\mu &= \sqrt{p_\mu^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} = \sqrt{\frac{m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2}{4m_\pi^2} c^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} \\ &= c^2 \sqrt{\frac{m_\pi^4 + m_\mu^4 - 2m_\pi^2 m_\mu^2 + 4m_\pi^2 m_\mu^2}{4m_\pi^2}} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2, \end{aligned}$$

mentre la sua velocità vale

$$v_\mu = \beta c = \frac{p_\mu c}{E_\mu} c = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} c \approx 0.27c.$$

La risposta alla domanda del problema è

$$\begin{aligned} L &= \frac{p_\mu}{m_\mu} \tau_\mu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi m_\mu} c \tau_\mu \\ &= \frac{(139.6 \text{ MeV}/c^2)^2 - (105.6 \text{ MeV}/c^2)^2}{2 \cdot (139.6 \text{ MeV}/c^2) \cdot (105.6 \text{ MeV}/c^2)} (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \cdot 2.2 \mu\text{s} \approx 186 \text{ m}. \end{aligned}$$

Il secondo modo per risolvere il problema è usando i quadrivettori. La conservazione del quadrimpulso impone

$$\underline{p}_\pi = \underline{p}_\mu + \underline{p}_\nu \rightarrow \underline{p}_\nu = \underline{p}_\pi - \underline{p}_\mu.$$

Eleviamo al quadrato, cioè svolgiamo il prodotto scalare di ciascuno dei membri dell'equazione con sé stessi, ricordando che la norma di un quadrimpulso è la massa della particella moltiplicata c^2 , e che il pione è fermo:

$$\begin{aligned} \underline{p}_\nu^2 &= (\underline{p}_\pi - \underline{p}_\mu)^2, \\ 0 &= m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2\underline{p}_\pi \cdot \underline{p}_\mu \\ 0 &= m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2 \left(\frac{E_\pi}{c} \frac{E_\mu}{c} - \mathbf{p}_\pi \cdot \mathbf{p}_\mu \right) \\ 0 &= m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu, \end{aligned}$$

da cui segue subito

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2}{2m_\pi}.$$

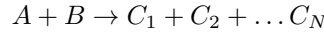
Per ottenere p_μ , basta invece isolare, nella equazione della conservazione del quadrimpulso, p_μ invece di p_ν , e usare la conservazione dell'impulso spaziale (che impone che i due moduli siano uguali, $p_\mu = p_\nu$) e il fatto che il neutrino ha massa nulla:

$$\begin{aligned} \underline{p}_\mu &= \underline{p}_\pi - \underline{p}_\nu, \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 + 0 - 2\underline{p}_\pi \cdot \underline{p}_\nu, \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2\left(\frac{E_\pi E_\nu}{c} - \mathbf{p}_\pi \cdot \mathbf{p}_\nu\right), \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi E_\nu, \\ m_\mu^2 c^2 &= m_\pi^2 c^2 - 2m_\pi p_\mu c, \\ p_\mu &= \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c. \end{aligned}$$

1.5.2 Cinematica di una reazione

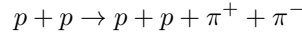
Esercizio 7 Energia di soglia di una reazione

Qual è l'energia minima che deve avere una particella A , che collide nel riferimento del laboratorio con una particella ferma B , per produrre le particelle $C_1 \dots C_N$ – ovvero, perché la reazione



sia cinematicamente permessa?

Qual è l'energia di soglia della produzione di due pioni tramite il processo



se si assume che il secondo protone è fermo?

Soluzione dell'esercizio 7

Il quadrimpulso totale prima dell'urto, nel sistema del laboratorio, vale

$$\underline{P} = \left(\frac{E_A}{c} + m_B c, \mathbf{p}_A \right).$$

Sfruttiamo il fatto che la sua norma è invariante sotto cambiamento di sistema di riferimento. Essa si conserva nell'urto⁹, per cui possiamo lavorare nel più conveniente sistema del centro di massa, definito come quel sistema di riferimento in cui l'impulso totale è nullo. Se denotiamo con un asterisco le quantità calcolate in questo sistema,

$$\underline{P}'^{(*)} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{E_i^{(*)}}{c}, \mathbf{0} \right),$$

dall'invarianza della norma del quadrimpulso

$$\underline{P}^2 = \left(\underline{P}'^{(*)} \right)^2,$$

per cui, denotando come sempre con p_A il modulo dell'impulso spaziale \mathbf{p}_A , e usando la relazione $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ applicata alla particella A ,

$$\begin{aligned} \underline{P}^2 &= \frac{E_A^2}{c^2} + m_B^2 c^2 + 2\frac{E_A}{c} m_B c - p_A^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2E_A m_B, \\ \left(\underline{P}'^{(*)} \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{E_i^{(*)}}{c} \right)^2 - 0 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{m_i^2 c^4 + \left(p_i^{(*)} \right)^2 c^2}}{c} \right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^N m_i c \right)^2, \end{aligned}$$

⁹La norma del quadrimpulso totale è dunque uno scalare, che assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, sia prima che dopo l'interazione. Sta alla nostra perizia scegliere il sistema di riferimento più conveniente per calcolarlo...

da cui segue che l'energia di soglia perché questa reazione sia cinematicamente permessa, E_{soglia} , è data dalla relazione

$$E_a \geq E_{\text{soglia}} \equiv \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i\right)^2 - m_A^2 - m_B^2}{2m_B} c^2.$$

Nel caso della reazione

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-,$$

l'energia di soglia vale

$$E_{\text{soglia}} = \frac{(m_p + m_p + m_\pi + m_\pi)^2 - m_p^2 - m_p^2}{2m_p} c^2 \approx 1.5 \text{ GeV}.$$

1.5.3 Sistemi di riferimento tipici

I calcoli cinematici si conducono tipicamente in due sistemi di riferimento:

- sistema di riferimento del laboratorio, definito a seconda del problema fisico (esperimento) che si sta considerando;
- sistema di riferimento del centro di massa, definito come quello in cui l'impulso totale (somma vettoriale degli impulsi spaziali) è nullo.

Il vantaggio del sistema di riferimento del centro di massa è spesso quello di semplificare la descrizione cinematica del problema.

Si cerca tipicamente di lavorare con grandezze invarianti, cioè grandezze che possano essere calcolate indifferentemente in un qualunque sistema di riferimento. La più semplice¹⁰ è l'energia del centro di massa, \sqrt{s} , definita come la norma del quadrimpulso totale del sistema fisico, P_{tot} . La norma di un quadrimpulso è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale (è un invariante relativistico), e il quadrimpulso è una grandezza conservata – fissato un sistema di riferimento – fra stato iniziale e stato finale: ne segue che \sqrt{s} si può dunque calcolare indifferentemente nello stato iniziale e finale di un qualunque processo e in qualunque sistema di riferimento inerziale.

Per la definizione, ponendo $c = 1$,

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &\equiv |P_{\text{tot}}| = \sqrt{P_{\text{tot}} \cdot P_{\text{tot}}} \\ &= \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sum_i E_i^{(*)}\right)^2 - \left(\sum_i \mathbf{p}_i^{(*)}\right)^2} = E_{\text{tot}}^{(*)} \end{aligned}$$

dove le somme scorrono sulle particelle (nello stato iniziale o finale, a scelta) e l'asterisco denota le quantità calcolate nel sistema di riferimento del centro di massa. Ne segue cioè che l'energia del centro di massa è uguale alla somma delle energie delle varie particelle nel sistema di riferimento del centro di massa.

Esercizio 8 Collider vs bersaglio fisso

Qual è il modo più efficiente di far collidere particelle: un collider (o “collisionatore”), in cui due fasci di particelle si scontrano con impulsi lungo la stessa direzione ma verso opposto, o un esperimento a bersaglio fisso (o “targhetta fissa”), in cui un fascio si scontra contro un bersaglio immobile nel sistema di riferimento del laboratorio?

Soluzione dell'esercizio 8

“Efficiente” significa energeticamente conveniente – brutalmente, il costo (lavoro, o più colloquialmente *denaro*) necessario ad accelerare fasci di particelle viene “dato” alla collisione, e non viene cioè sprecato per causare un moto relativo fra sistema del centro di massa e laboratorio. Matematicamente questo significa chiedersi, date energia e impulso di due particelle A e B che si scontrano $(E_A, E_B, \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B)$, quanto vale

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2}.$$

¹⁰Vedrete il prossimo anno che, analogamente ad s , in una reazione si possono definire altre due grandezze u e t in funzione dei quadrimpulsi delle particelle di stato iniziale e finale. Le variabili s , t e u prendono il nome di variabili di Mandelstam, e rivestono un ruolo fondamentale nel formalismo della teoria dei campi.

Nel caso di un collider, sistema del centro di massa e sistema del laboratorio coincidono:

$$\begin{aligned}
\sqrt{s} &= \sqrt{(E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2} \\
&= \sqrt{(E_A + E_B)^2 - (p_A - p_B)^2} \\
&= \sqrt{(E_A^2 + E_B^2 + 2E_A E_B) - (p_A^2 + p_B^2 - 2p_A p_B)} \\
&= \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2(E_A E_B + p_A p_B)},
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione massa-energia ($E^2 = p^2 + m^2$), e il fatto che i due impulsi sono “back-to-back”. Un esperimento tipico lavora ad alte energie, per cui $E \approx p$ e quindi

$$\sqrt{s} \approx 2\sqrt{E_A E_B},$$

e nel caso di fasci di particelle identiche con lo stesso impulso $\sqrt{s} = 2E_A$: l’energia del centro di massa in questo caso¹¹ è quindi il doppio dell’energia del singolo fascio.

Un esperimento a bersaglio fisso ha un vantaggio – quello di poter far collidere le particelle del fascio con un numero molto elevato di particelle contenute nel bersaglio¹² – ma è cinematicamente sfavorito rispetto ad un collider. Infatti, se il bersaglio è B ,

$$\begin{aligned}
\sqrt{s} &= \sqrt{(E_A + E_B)^2 - (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2} \\
&= \sqrt{(E_A + m_B)^2 - (p_A + 0)^2} \\
&= \sqrt{(E_A^2 + m_B^2 + 2E_A m_B) - (p_A^2)} \\
&= \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2(E_A m_B)}.
\end{aligned}$$

Ancora una volta, nel limite tipico in cui gli impulsi in gioco sono maggiori delle masse delle particelle,

$$\sqrt{s} \approx \sqrt{2E_A m_B},$$

cioè l’energia del centro di massa cresce con la *radice quadrata* dell’energia del fascio di particelle.

Spesso è conveniente lavorare nel sistema del centro di massa, per poi riportare i risultati trovati nel sistema del laboratorio. Si fa con una trasformazione di Lorentz: il punto di partenza è osservare che i quadrimpulsi totali nei sistemi di centro di massa e laboratorio sono legati da

$$\underline{P}_{\text{tot}}^{(*)} = \Gamma \underline{P}_{\text{tot}},$$

dove

$$\begin{aligned}
\underline{P}_{\text{tot}}^{(*)} &= \begin{pmatrix} \sum_i E_i^{(*)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\underline{P}_{\text{tot}} &= \begin{pmatrix} E_{\text{tot}} \\ p_{\text{tot}}^x \\ p_{\text{tot}}^y \\ p_{\text{tot}}^z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se assumiamo che la velocità del sistema di riferimento del centro di massa sia lungo l’asse x , $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$, abbiamo che $p_{\text{tot}}^y = p_{\text{tot}}^z = 0$ e che $p_{\text{tot}}^x = |\mathbf{p}_{\text{tot}}| \equiv p_{\text{tot}}$. La trasformazione di Lorentz applicata al quadrimpulso totale si scrive dunque in termini di $\beta_{CM} = V$ ($c = 1$) e $\gamma_{CM} = 1/\sqrt{1 - \beta_{CM}^2}$ come

$$\begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{CM} & -\beta_{CM}\gamma_{CM} & 0 & 0 \\ -\beta_{CM}\gamma_{CM} & \gamma_{CM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\text{tot}} \\ p_{\text{tot}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

¹¹Che è il caso reale ad esempio nel Large Hadron Collider al CERN di Ginevra, che collide al momento fasci di protoni da 6.5 TeV di energia: acceleratori di particelle “simmetrici” di questo tipo sono energeticamente convenienti e sono poi costruttivamente più semplici da realizzare, proprio a causa del fatto che sistema di riferimento del centro di massa e del laboratorio coincidono.

¹²Che l’interazione avvenga sui protoni, elettroni neutroni, o gli atomi del bersaglio, in ogni caso si tratta di un numero di particelle bersaglio dell’ordine del numero di Avogadro. I fasci di particelle tipici sono tenuti assieme con complessi sistemi di acceleratori che usano campi magnetici, e raggiungono tipicamente un numero di particelle attorno a 10^{11} , molto inferiore al numero di Avogadro.

cioè

$$\begin{cases} \sqrt{s} &= \gamma_{CM} E_{\text{tot}} - \beta_{CM} \gamma_{CM} p_{\text{tot}}, \\ 0 &= -\beta_{CM} \gamma_{CM} E_{\text{tot}} + \gamma_{CM} p_{\text{tot}}, \end{cases}$$

da cui segue

$$\beta_{CM} = \frac{p_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}},$$

$$\gamma_{CM} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{CM}^2}} = \frac{E_{\text{tot}}}{\sqrt{E_{\text{tot}}^2 - p_{\text{tot}}^2}} = \frac{E_{\text{tot}}}{\sqrt{s}}.$$

Esercizio 9 Come cambia l'energia tra centro di massa e laboratorio

Consideriamo il decadimento del pione in un muone e un antineutrino muonico,

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu,$$

dove $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, $m_\mu = 105.6 \text{ MeV}/c^2$ e $m_\nu = 0$. Il pione si muove con una velocità $v = 0.27c$.

Quanto vale l'energia del muone nei vari sistemi di riferimento?

Soluzione dell'esercizio 9

Nel sistema di riferimento del centro di massa, in cui il pione è fermo, l'energia del muone ha un valore univocamente determinato (cioè è un numero), pari a

$$E_\mu^{(*)} = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 109.8 \text{ MeV}.$$

Si ha poi che $p_\mu^{(*)} = \sqrt{(E_\mu^{(*)})^2 - m_\mu^2} \approx 30.2 \text{ MeV}$.

Nel sistema di riferimento del laboratorio, tuttavia, l'energia del muone può assumere un insieme di valori. Questi dipendono dall'angolo di emissione del muone (nel sistema di riferimento del pione) rispetto alla direzione di volo del pione (cioè alla direzione del boost di Lorentz), θ^* . Infatti, se indichiamo con $p_\parallel^{(*)}$ la componente dell'impulso del muone (sempre nel riferimento del pione, ovvero del centro di massa) lungo la direzione del boost di Lorentz, le trasformazioni di Lorentz ci dicono che

$$E_\mu = \gamma_\pi E_\mu^{(*)} + \beta_\pi \gamma_\pi p_\parallel^{(*)} = \gamma_\pi E_\mu^{(*)} + \beta_\pi \gamma_\pi p^{(*)} \cos \theta^*.$$

Ne segue che E_μ assume valori compresi fra un valore massimo e uno minimo,

$$E_\mu^{\text{max}} = \gamma_\pi (E_\mu^{(*)} + \beta_\pi p^{(*)}) \approx 122.4 \text{ MeV},$$

$$E_\mu^{\text{min}} = \gamma_\pi (E_\mu^{(*)} - \beta_\pi p^{(*)}) \approx 105.6 \text{ MeV}.$$

Si noti come l'energia minima è uguale alla massa del muone, ovvero corrisponde alla condizione in cui questo ha energia cinetica nulla.

Esercizio 10 Collider asimmetrico

- SuperKEKB¹³ è un acceleratore di particelle che si trova in Giappone, e fa scontrare fasci di elettroni di energia $E_1 = 7 \text{ GeV}$ con fasci di positroni (particelle della stessa massa degli elettroni, $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$, e carica opposta) di energia $E_2 = 4 \text{ GeV}$.

- Si calcoli l'energia del centro di massa della collisione.
- Si consideri il processo

$$e^+ + e^- \rightarrow \Upsilon(4S),$$

dove la $\Upsilon(4S)$ è una particella neutra di massa $m_\Upsilon = 10.58 \text{ GeV}/c^2$ e larghezza intrinseca $\tau_\Upsilon = 20.5 \text{ MeV}$. Quanto spazio percorrerà in media la $\Upsilon(4S)$ nel laboratorio prima di decadere?

- La $\Upsilon(4S)$ decade in coppie di particelle B^\pm , dette mesoni B , di massa $m_B = 5.279 \text{ GeV}/c^2$, per cui si ha nel complesso

$$e^+ + e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B^+ + B^-.$$

- Calcolare, nel riferimento del centro di massa, energia e impulso dei mesoni B .
- I mesoni B sono a loro volta particelle instabili, e hanno una vita media di 1.638 ps. Quanto spazio percorreranno nel laboratorio lungo l'asse di collisione dei fasci?

¹³<https://en.wikipedia.org/wiki/SuperKEKB> e https://en.wikipedia.org/wiki/Belle_II_experiment

Soluzione dell'esercizio 10

L'energia del centro di massa della collisione è data da

$$\sqrt{s} \approx 2\sqrt{E_1 E_2} = 10.58 \text{ GeV}.$$

Il centro di massa si sposta nella direzione della collisione dei fasci, con lo stesso verso del fascio di elettroni e con una velocità che vale, se trascuriamo le masse di elettrone e positrone,

$$\beta_{\text{CM}} = \frac{|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|}{E_1 + E_2} \approx \frac{7 \text{ GeV} - 4 \text{ GeV}}{7 \text{ GeV} + 4 \text{ GeV}} \approx 0.27,$$

per cui $\gamma_{\text{CM}} = 1/\sqrt{1 - \beta_{\text{CM}}^2} \approx 1.013$.

Di conseguenza, la $\Upsilon(4S)$ viaggerà in media per una distanza

$$\beta_{\text{CM}} \gamma_{\text{CM}} c \tau = \beta_{\text{CM}} \gamma_{\text{CM}} c \frac{\hbar}{\Gamma} \approx \frac{|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|}{m_{\Upsilon}} \frac{197 \text{ MeV fm}}{20.5 \text{ MeV}} \approx \frac{3 \text{ GeV}}{10.58 \text{ GeV}} \times 9.6 \text{ fm} \approx 2.7 \text{ fm},$$

cioè decadrà quasi istantaneamente (nessun rivelatore è in grado di misurare distanze dell'ordine di un fm!).

Nel sistema del centro di massa, l'energia dei mesoni B ($E_A^{(*)}$ ed $E_B^{(*)}$) è un numero, e si trova usando il fatto che – a causa della conservazione dell'impulso spaziale – gli impulsi dei due mesoni hanno la stessa direzione, versi opposti e lo stesso modulo $p^{(*)}$. Difatti, poiché le masse sono identiche, si ha

$$\sqrt{s} = E_A^{(*)} + E_B^{(*)} = 2\sqrt{p^{(*)2} + m_B^2},$$

che implica

$$E_A^{(*)} = E_B^{(*)} = \frac{\sqrt{s}}{2} \approx 5.2915 \text{ GeV},$$

$$p^{(*)} = \sqrt{\frac{s}{4} - m_B^2} \approx 363 \text{ MeV}.$$

Nel sistema del centro di massa, i mesoni B viaggeranno in media una distanza

$$\beta_B^{(*)} \gamma_B^{(*)} c \tau = \frac{p^{(*)}}{m_B} c \tau \approx \frac{363 \text{ MeV}}{5.279 \text{ GeV}} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 1.638 \times 10^{-12} \text{ s} \approx 0.034 \text{ mm}.$$

Nel sistema del laboratorio bisogna tuttavia tenere conto del moto del centro di massa: questo ha come conseguenza che l'energia dei mesoni B non assume un unico valore numerico, bensì può assumere valori compresi fra un minimo e un massimo, a seconda dell'angolo di emissione nel sistema del centro di massa. Ragionando come per l'esercizio precedente, e chiamando $E^{(*)}$ e $\theta^{(*)}$ l'energia di uno dei due mesoni e l'angolo (nel centro di massa) tra il suo impulso e la direzione lungo cui si sposta il centro di massa (ovvero la direzione del fascio di elettroni), possiamo scrivere la componente dell'impulso lungo la direzione del fascio di elettroni come

$$p_{\mu}^{\parallel} = \gamma_{\text{CM}}(p^{(*)} \cos \theta^{(*)} + \beta_{\text{CM}} E^{(*)}),$$

e perciò

$$p_B^{\parallel, \text{max}} = \gamma_{\text{CM}}(p^{(*)} + \beta_{\text{CM}} E^{(*)}) \approx 1861 \text{ MeV},$$

$$p_B^{\parallel, \text{min}} = \gamma_{\text{CM}}(-p^{(*)} + \beta_{\text{CM}} E^{(*)}) \approx 1107 \text{ MeV},$$

cui corrispondono distanze medie lungo la direzione del fascio di elettroni di

$$\beta^{\text{max}} \gamma^{\text{max}} c \tau = \frac{|p_{\mu}^{\parallel, \text{max}}|}{m_B} c \tau \approx 0.17 \text{ mm},$$

$$\beta^{\text{min}} \gamma^{\text{min}} c \tau = \frac{|p_{\mu}^{\parallel, \text{min}}|}{m_B} c \tau \approx 0.10 \text{ mm}.$$

Si tratta di distanze misurabili dagli esperimenti tipici di fisica delle particelle, che hanno risoluzioni dell'ordine di qualche decina di μm lungo l'asse di collisione dei fasci di particelle. Questi esperimenti possono dunque misurare τ di alcune delle particelle che producono (in questo esempio i mesoni B^{\pm}) ricostruendo la posizione del punto in cui queste decadono.

1.5.4 Trasformazione degli angoli

Un esperimento tipico misura la produzione di particelle in diversi punti dello spazio: questo sia per necessità sperimentali (i rivelatori “vedono” tipicamente una frazione dell’angolo solido) che soprattutto fisiche (la cinematica – e in maniera più rilevante la *dinamica* delle interazioni fondamentali – possono determinare anisotropie nella emissione di particelle in un processo fisico). Ad un collider (come LHC), ad esempio, gli esperimenti sono spesso costruiti a simmetria cilindrica attorno all’asse dei fasci, e costituiti da rivelatori segmentati spazialmente, in maniera da poter determinare la coordinata spaziale di una particella che ha interagito con il rivelatore (interagito lasciando cioè un segnale, dovuto alla sua interazione con la materia).

Si lavora spesso in coordinate sferiche, per cui il quadrimpulso di una particella si scrive ($p \equiv |\mathbf{p}|$)

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p \sin \theta \cos \phi \\ p \sin \theta \sin \phi \\ p \cos \theta \end{pmatrix}$$

dove $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in [0, \pi)$ sono gli angoli azimutale e polare formati dall’impulso della particella con gli assi coordinati del riferimento cartesiano xyz . Collegare una quantità misurata nel laboratorio ad una misurata nel sistema del centro di massa, se quest’ultimo si muove lungo l’asse z (o in altri termini il “boost di Lorentz” è lungo l’asse z), si fa tramite le trasformazioni di Lorentz,

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} E \\ p \sin \theta \cos \phi \\ p \sin \theta \sin \phi \\ p \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{CM} & 0 & 0 & \beta_{CM}\gamma_{CM} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{CM}\gamma_{CM} & 0 & 0 & \gamma_{CM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{(*)} \\ p^{(*)} \sin \theta^{(*)} \cos \phi^{(*)} \\ p^{(*)} \sin \theta^{(*)} \sin \phi^{(*)} \\ p^{(*)} \cos \theta^{(*)} \end{pmatrix}.$$

L’impulso nel piano xy (trasverso alla direzione con cui il sistema di riferimento del centro di massa si muove rispetto al laboratorio) si denota spesso come *impulso trasverso*, p_T , ed è una grandezza invariante di Lorentz – proprio perché si tratta della componente dell’impulso lungo il piano ortogonale alla direzione del boost di Lorentz. In formule, infatti, poiché

$$\begin{aligned} p_x &= p \sin \theta \cos \phi = p^{(*)} \sin \theta^{(*)} \cos \phi^{(*)}, \\ p_y &= p \sin \theta \sin \phi = p^{(*)} \sin \theta^{(*)} \sin \phi^{(*)}, \end{aligned}$$

si ha che

$$p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{p^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = p \sin \theta = p^{(*)} \sin \theta^{(*)},$$

da cui segue $\phi = \phi^{(*)}$: l’angolo azimutale è un invariante di Lorentz (ovvero, il valore di ϕ di una particella misurato in qualunque sistema di riferimento inerziale è lo stesso).

Quello che cambia fra sistema di riferimento del centro di massa e del laboratorio è l’angolo θ : la legge di trasformazione si può ricavare facendo il rapporto

$$\frac{p_x}{p_z} = \tan \theta \cos \phi = \frac{p^{(*)} \sin \theta^{(*)} \cos \phi}{\beta_{CM}\gamma_{CM}E^{(*)} + \gamma_{CM}p^{(*)} \cos \theta^{(*)}},$$

dove abbiamo usato $\phi = \phi^{(*)}$. Se dividiamo numeratore e denominatore per $p^{(*)}$ otteniamo

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^{(*)}}{\gamma_{CM} \left(\frac{\beta_{CM}}{\beta^{(*)}} + \cos \theta^{(*)} \right)}.$$

Abbiamo espresso cioè la coordinata polare di una particella nel riferimento del laboratorio (quindi quella in cui la misuriamo) in funzione della coordinata polare della particella nel riferimento del centro di massa, del moto del centro di massa (β_{CM} e γ_{CM}) e della sua velocità nel sistema del centro di massa, $\beta^{(*)}$. Dunque, è il rapporto fra la velocità di una particella nel centro di massa e la velocità del centro di massa, a determinare dove misureremo questa particella nel laboratorio. Tendenzialmente ci interessa sapere quand’è che una particella riesce a “sfuggire” al moto del centro di massa, venendo emessa “all’indietro” nel sistema del laboratorio, e quando no.

Se la particella si muove nel centro di massa con la stessa velocità del centro di massa nel laboratorio ($\beta^{(*)} = \beta_{CM}$), il denominatore si annulla – e quindi $\theta = \pi/2$ – quando $\theta^{(*)} = \pi$, ovvero quando la particella è emessa “all’indietro” nel sistema del centro di massa.

Se la particella è più lenta del centro di massa, nel senso che $\beta^{(*)} < \beta_{CM}$, il denominatore di $\tan \theta$ è sempre positivo, per cui la particella è sempre emessa in avanti ($\theta < \pi/2$). Raggiunge un angolo massimo quando la derivata di $\tan \theta$ si annulla, ovvero per

$$\frac{d \tan \theta}{d\theta^{(*)}} = \frac{\cos \theta^{(*)} \gamma_{CM} \left(\frac{\beta_{CM}}{\beta^{(*)}} + \cos \theta^{(*)} \right) - \sin \theta^{(*)} \gamma_{CM} (-\sin \theta^{(*)})}{\dots} = 0,$$

che poi implica

$$\cos \theta^{(*)} \frac{\beta_{CM}}{\beta^{(*)}} = -1,$$

ovvero

$$\cos \theta^{(*)} = -\frac{\beta^{(*)}}{\beta_{CM}} \Rightarrow \sin \theta^{(*)} = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta^{(*)}}{\beta_{CM}} \right)^2},$$

che corrisponde nel sistema di riferimento del laboratorio a

$$\tan \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta^{(*)}}{\beta_{CM}} \right)^2}}{\gamma_{CM} \left(\frac{\beta_{CM}}{\beta^{(*)}} - \frac{\beta^{(*)}}{\beta_{CM}} \right)} = \frac{\beta^{(*)}}{\gamma_{CM}} \frac{1}{\sqrt{\beta_{CM}^2 - (\beta^{(*)})^2}}.$$

In corrispondenza di questo angolo massimo, l'energia della particella nel sistema del laboratorio avrà un certo valore $E|_{\theta=\theta_{\max}}$ che non corrisponde in generale alla massima energia della particella. Il valore dell'energia si trova applicando la trasformazione di Lorentz alla prima coordinata del quadrimpulso: ricordando che abbiamo assunto che il boost fosse lungo l'asse z , ed usando $\beta = p/E$, $\gamma = E/m$ ed $E^2 = p^2 + m^2$, abbiamo

$$\begin{aligned} E|_{\theta=\theta_{\max}} &= \left(\gamma_{CM} E^{(*)} + \beta_{CM} \gamma_{CM} p_z \right) \Big|_{\theta=\theta_{\max}} \\ &= \left(\gamma_{CM} E^{(*)} + \beta_{CM} \gamma_{CM} \left(p^{(*)} \cos \theta^{(*)} \right) \right) \Big|_{\theta=\theta_{\max}} \\ &= \gamma_{CM} \left(E^{(*)} + \beta_{CM} p^{(*)} \left(-\frac{\beta^{(*)}}{\beta_{CM}} \right) \right) \\ &= \gamma_{CM} \left(E^{(*)} + \beta_{CM} p^{(*)} \left(-\frac{p^{(*)}}{E^{(*)} \beta_{CM}} \right) \right) \\ &= \gamma_{CM} \left(\frac{(E^{(*)})^2 - (p^{(*)})^2}{E^{(*)}} \right) \\ &= \gamma_{CM} \left(\frac{m^2}{E^{(*)}} \right) = m \frac{\gamma_{CM}}{\gamma^{(*)}}. \end{aligned}$$

Sono dunque i casi con $\beta^{(*)} > \beta_{CM}$ quelli in cui si può avere una emissione “all'indietro” della particella, ovvero in cui $\pi > \theta > \pi/2$.

1.5.5 Stati finali a due corpi

Un decadimento in N corpi

$$P \rightarrow P_1 + P_2 + \dots + P_N,$$

è cinematicamente permesso quando l'energia della particella che decade è sufficiente a produrre le particelle nello stato finale: “sufficiente” corrisponde al caso limite in cui le particelle sono prodotte ferme. Nel riferimento del centro di massa della particella madre P – che, ricordiamo, è il sistema di riferimento in cui $\sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ – questa condizione per si scrive partendo dalla conservazione dell'energia fra stato iniziale $|i\rangle$ e stato finale: se M è la massa di P ,

$$E|_i\rangle = M = \sum_{i=1}^N E_i^{(*)} = \sum_{i=1}^N \sqrt{m_i^2 + |\mathbf{p}_i|^2} \geq \sum_i m_i.$$

Consideriamo il caso del decadimento a due corpi $A \rightarrow B + C$. L'energia del centro di massa \sqrt{s} , che è una grandezza invariante e conservata, si scrive

$$\sqrt{s} = m_A = E_B^{(*)} + E_C^{(*)}.$$

Nel sistema del centro di massa

$$\mathbf{p}_A^{(*)} + \mathbf{p}_B^{(*)} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_A^{(*)} = -\mathbf{p}_B^{(*)},$$

perciò ci conviene chiamare $p^{(*)}$ il modulo di $\mathbf{p}_A^{(*)}$ e $\mathbf{p}_B^{(*)}$. A questo punto

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= m_A = \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_B^2} + \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_C^2}, \\ m_A - \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_B^2} &= \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_C^2},\end{aligned}$$

ed elevando al quadrato

$$\begin{aligned}m_A^2 + (p^{(*)})^2 + m_B^2 - 2m_A\sqrt{(p^{(*)})^2 + m_B^2} &= (p^{(*)})^2 + m_C^2, \\ m_A^2 + m_B^2 - m_C^2 &= 2m_A\sqrt{(p^{(*)})^2 + m_B^2},\end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente l'energia della particelle B nel riferimento del centro di massa,

$$E_B^{(*)} = \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_B^2} = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A} = \frac{s + m_B^2 - m_C^2}{2\sqrt{s}},$$

e per simmetria possiamo scambiare gli indici A e B ottenendo

$$E_C^{(*)} = \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_C^2} = \frac{s + m_C^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}}.$$

Un caso notevole è quello in cui B e C abbiano la stessa massa, per cui si ha

$$E_B^{(*)} = E_C^{(*)} = \frac{\sqrt{s}}{2} = \frac{m_A}{2}.$$

Vale la pena di sottolineare che aver espresso le energie nel centro di massa in funzione di \sqrt{s} implica che questo risultato vale per ogni processo in cui lo stato finale ha due corpi: basterà conoscere \sqrt{s} e le energie delle due particelle saranno univocamente determinate nel centro di massa. Questo non è vero se ci si sposta nel sistema di riferimento del laboratorio, né se si considerano decadimenti in tre o più corpi, per i quali le energie non sono univocamente determinate, ma piuttosto si ha una certa *distribuzione di probabilità* di energia. Proviamo nella prossima sezione a intuire come valutare queste distribuzioni, e in generale a chiederci come la distribuzione di una quantità cinematica cambia da un sistema di riferimento all'altro.

1.5.6 Distribuzioni cinematiche nei vari sistemi di riferimento

Consideriamo il decadimento del bosone di Higgs in due fotoni,

$$H \rightarrow \gamma + \gamma,$$

dove la massa del primo vale $m_H = 125$ GeV e la massa dei secondi (che denoteremo con i pedici 1 e 2) è nulla. Sappiamo dalla sezione precedente che

$$E_B^{(*)} = \frac{s + m_B^2 - m_C^2}{2\sqrt{s}} = \frac{m_H}{2} = E_C^{(*)}.$$

Massa invariante Nel sistema di riferimento del laboratorio la massa invariante del bosone di Higgs può essere ottenuta misurando energia e distanza angolare fra i due fotoni. Infatti, calcolando l'energia del centro di massa nello stato iniziale nel sistema di riferimento del centro di massa, e eguagliandola al suo valore nello stato finale (in quanto grandezza conservata) nel sistema del laboratorio (in quanto grandezza invariante), abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= m_H = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} \\ &= \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - p_1^2 - p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \theta_{12}} \\ &= \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \theta_{12}} \\ &= \sqrt{2E_1E_2(1 - \cos \theta_{12})},\end{aligned}$$

dove θ_{12} è l'angolo fra gli impulsi vettoriali dei due fotoni, e sempre per i fotoni abbiamo usato $E^2 = m^2 + p^2 = p^2$. Tutte le quantità sono misurate nel sistema del laboratorio. Abbiamo dunque una maniera semplice di determinare la massa della particella H : misurando \sqrt{s} del sistema di due fotoni ci aspettiamo di ottenere "sempre lo stesso valore", pari a m_H . Più realisticamente, tenendo cioè conto delle risoluzioni di misura (significative sia per le misure di energia che per quelle angolari), ci aspettiamo che \sqrt{s} segua una distribuzione di probabilità molto simile a una delta di Dirac centrata in m_H , con una dispersione dovuta a effetti sperimentali.

Apertura angolare dei prodotti di decadimento L'apertura angolare θ_{12} può rappresentare una sfida per riuscire a ricostruire sperimentalmente i due fotoni (a “distinguere” due fotoni quasi sovrapposti da uno solo, ad esempio). In generale possiamo chiederci se esiste un valore massimo o minimo di questa apertura angolare. Per rispondere a questa domanda partiamo dal fatto che θ_{12} è univocamente determinato una volta note le energie dei due fotoni, in quanto¹⁴

$$\begin{aligned} s &= m_H^2 = 2E_1E_2(1 - \cos \theta_{12}), \\ &= 2E_1E_2 \left(2 \sin^2 \frac{\theta_{12}}{2} \right) \\ &= 4E_1E_2 \sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\sin \frac{\theta_{12}}{2} = \frac{m_H}{2\sqrt{E_1E_2}}. \quad (9)$$

Si noti come questa equazione ha un'unica incognita, l'energia di uno dei fotoni, visto che l'energia dell'altro fotone è univocamente determinata dalla conservazione dell'energia nel sistema del laboratorio,

$$E_1 + E_2 = E_H$$

L'angolo estrema (che è un minimo) θ_{12}^{\min} si trova cercando l'energia per cui la derivata di θ_{12} si annulla. Questo succede ovviamente quando il denominatore della (9) è massimo, ovvero quando

$$\frac{dE_1E_2}{dE_1} = \frac{dE_1(E_H - E_1)}{dE_1} = E_H - 2E_1 = 0,$$

ovvero per $E_1 = \frac{E_H}{2}$. Questo corrisponde a

$$\sin \frac{\theta_{12}}{2} \Big|_{\theta_{12}=\theta_{12}^{\min}} = \frac{m_H}{2\sqrt{\frac{E_H}{2}(E_H - \frac{E_H}{2})}} = \frac{m_H}{E_H} = \frac{1}{\gamma_H}.$$

Quando il bosone di Higgs ha impulso sufficientemente alto, $\beta_H \rightarrow 1$, si può approssimare $\sin(x) \approx x$ e ottenere

$$\theta_{12} \approx 2 \frac{m_H}{E_H} = 2 \frac{1}{\gamma_H}.$$

Un bosone di Higgs di $p_H = 100 \text{ GeV}$ decade in due fotoni separati fra loro di circa 89 deg, ovvero quasi back-to-back (e quindi molto facili da distinguere) mentre un bosone di Higgs di 800 GeV di impulso decade in due fotoni più vicini, con una apertura angolare di circa 14 deg.

Distribuzione dell'energia dei prodotti di decadimento L'altro problema sperimentale è quello di sapere quale energia ci aspettiamo che abbiano i prodotti di decadimento – in termini più formali qual è la *distribuzione di probabilità* (o più semplicemente la distribuzione) delle particelle di stato finale. Chiamiamo x la direzione lungo la quale si muove H nel sistema del laboratorio – la direzione del boost di Lorentz. L'energia del primo fotone nel sistema del laboratorio si può scrivere in funzione della sua energia (o del suo impulso, il cui modulo è $p_1^{(*)} = p^{(*)}$) nel sistema del centro di massa, e dell'angolo che il suo impulso forma fra l'asse x nel centro di massa. L'altro fotone avrà impulso con lo stesso modulo $p_2^{(*)} = p_1^{(*)} = p^{(*)}$, e si troverà (per la conservazione dell'impulso) ad un angolo $\pi + \theta^{(*)}$ con l'asse x . Abbiamo:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_H E_1^{(*)} + \beta_H \gamma_H p_{1,x}^{(*)} \\ &= \gamma_H \left(E_1^{(*)} + \beta_H p^{(*)} \cos \theta^* \right). \end{aligned}$$

¹⁴Qui usiamo l'identità trigonometrica ($x = 2\alpha$)

$$\begin{aligned} \cos(x) &\equiv \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Ma l'energia dei fotoni nel sistema del centro di massa è univocamente determinata – è pari a $E_1^{(*)} = E_2^{(*)} = \frac{m_H}{2}$ – per cui, usando $m_\gamma = 0$ e quindi $E = p$, e $\beta = p/E$ e $\gamma = E/m$,

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma_H \left(\frac{m_H}{2} + \beta_H \frac{m_H}{2} \cos \theta^{(*)} \right) \\ &= \frac{E_H}{m_H} \left(\frac{m_H}{2} + \frac{p_H}{E_H} \frac{m_H}{2} \cos \theta^{(*)} \right) \\ &= \frac{E_H + p_H \cos \theta^{(*)}}{2}, \end{aligned}$$

e simmetricamente

$$E_2 = \frac{E_H - p_H \cos \theta^{(*)}}{2}.$$

Questo significa che le energie dei due fotoni nel sistema del laboratorio dipendono dall'angolo in cui sono emessi nel sistema del centro di massa. Nell'ipotesi in cui il decadimento nel sistema del centro di massa sia isotropo,¹⁵ vediamo subito che le due energie sono comprese fra un valore massimo e un valore minimo,

$$\begin{aligned} \frac{E_H - p_H}{2} &\leq E_1 \leq \frac{E_H + p_H}{2}, \\ \frac{E_H - p_H}{2} &\leq E_2 \leq \frac{E_H + p_H}{2}, \end{aligned}$$

La domanda che possiamo porci è: qual è la distribuzione dell'energia dei fotoni che ne consegue? Dimostriamo che – visto che il decadimento è isotropo per ipotesi nel sistema di riferimento del centro di massa – la distribuzione dell'energia dei fotoni è piatta.

Formalizziamo innanzitutto l'ipotesi dell'emissione isotropa nel centro di massa. La probabilità che un fotone nel sistema del centro di massa si trovi in una certa cella infinitesima $d\Omega^{(*)}$ dell'angolo solido è in generale funzione $\mathcal{P}(\Omega^{(*)})$; per la definizione di probabilità vale

$$\int d\Omega^{(*)} \mathcal{P}(\Omega^{(*)}) = 1.$$

L'isotropia implica che questa funzione sia una costante,

$$\mathcal{P}(\Omega^{(*)}) = k,$$

perciò

$$1 = \int d\Omega^{(*)} \mathcal{P}(\Omega^{(*)}) = k \int d\Omega^{(*)} = 4\pi k \Rightarrow k = \frac{1}{4\pi}.$$

Per dedurre da questo la distribuzione di probabilità in funzione dell'angolo polare nel centro di massa $\theta^{(*)}$, usiamo l'isotropia in ϕ :

$$\int d\Omega^{(*)} = \int \sin \theta^{(*)} d\theta^{(*)} d\phi^{(*)} = 2\pi \int d \cos \theta^{(*)}.$$

Perciò, la distribuzione di probabilità f in funzione di $\Omega^{(*)}$ si scrive

$$\frac{df}{d\Omega^{(*)}} = \frac{1}{4\pi} = \frac{df}{2\pi d \cos \theta^{(*)}},$$

perciò la distribuzione di probabilità che un fotone sia emesso in funzione dell'angolo polare nel centro di massa vale

$$\frac{df}{d \cos \theta^{(*)}} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Non ci sorprende il fatto che anche questa sia costante.

¹⁵Ovvero, come accenniamo in seguito, che la particella che decade abbia spin nullo.

A questo punto possiamo passare a calcolare la quantità finale che ci interessa, la distribuzione di probabilità dell'energia del fotone nel riferimento del laboratorio. Questa si scrive

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dE_1} &= \frac{df}{d\Omega^{(*)}} \frac{d\Omega^{(*)}}{dE_1} \\
&= \frac{df}{2\pi d\cos\theta^{(*)}} \frac{2\pi d\cos\theta^{(*)}}{dE_1} \\
&= \frac{df}{d\cos\theta^{(*)}} \left(\frac{d\cos\theta^{(*)}}{d\left(\frac{E_H+p_H\cos\theta^{(*)}}{2}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{p_H}{2}} = \frac{1}{p_H},
\end{aligned}$$

cioè è anche questa una costante. Se nel sistema del centro di massa l'energia di ciascun fotone è fissata a un unico valore numerico, pari a $m_H/2$, nel sistema del laboratorio questa può assumere infiniti valori compresi fra $\frac{E_H-p_H}{2}$ e $\frac{E_H+p_H}{2}$, tutti con uguale probabilità. Questo perché, nel sistema del centro di massa, tutti i valori di θ^* possono essere assunti con la stessa probabilità.

Distribuzione dell'angolo fra i prodotti di decadimento Analogamente possiamo chiederci: qual è la distribuzione di probabilità dell'angolo di apertura fra i due fotoni? Questo estende naturalmente il calcolo dell'angolo *minimo* che abbiamo effettuato in precedenza. Il nostro scopo è in altri termini quello di calcolare

$$\frac{df}{d\theta_{12}} = \frac{df}{dE_1} \frac{dE_1}{d\theta_{12}}.$$

Per calcolare il primo termine del prodotto, partiamo dalla (9),

$$\sin \frac{\theta_{12}}{2} = \frac{m_H}{2\sqrt{E_1 E_2}} = \frac{m_H}{2\sqrt{E_1(E_H - E_1)}},$$

ed esprimiamo E_1 in funzione di θ_{12} : elevando al quadrato,

$$\begin{aligned}
\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2} &= \frac{m_H^2}{4(E_1(E_H - E_1))}, \\
4E_1 E_H - 4E_1^2 &= \frac{m_H^2}{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}}, \\
4E_1 E_H - 4E_1^2 - \frac{m_H^2}{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}} &= 0, \\
E_H \pm \sqrt{E_H^2 - \frac{m_H^2}{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}}} & \\
E_1 &= \frac{E_H \pm \sqrt{E_H^2 - \frac{m_H^2}{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}}}}{2}.
\end{aligned}$$

Derivando otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{dE_1}{d\theta_{12}} &= \frac{1}{2} \left[\pm \frac{1}{2} \left(E_H^2 - \frac{m_H^2}{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}} \right)^{\frac{1}{2}-1} (-1)(-1) \frac{2m_H^2 \sin \frac{\theta_{12}}{2} \cos \frac{\theta_{12}}{2}}{\sin^4 \frac{\theta_{12}}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{4} \frac{\sin \frac{\theta_{12}}{2}}{\sqrt{E_H^2 \sin^2 \frac{\theta_{12}}{2} - m_H^2}} 2 \frac{\sin \frac{\theta_{12}}{2} \cos \frac{\theta_{12}}{2} m_H^2}{\sin^4 \frac{\theta_{12}}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2}} \frac{m_H^2 \cos \frac{\theta_{12}}{2}}{\sqrt{E_H^2 \sin^2 \frac{\theta_{12}}{2} - m_H^2}},
\end{aligned}$$

che ci porta infine a

$$\frac{df}{d\theta_{12}} = \frac{df}{dE_1} \frac{dE_1}{d\theta_{12}} = \frac{1}{p_H} m_H^2 \cos \frac{\theta_{12}}{2} \frac{1}{2E_H} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2} - \frac{m_H^2}{E_H^2}}}.$$

Questa distribuzione è decrescente in θ_{12} ha un valore massimo quando la radice a denominatore è minima, cioè quando

$$\sin^2 \frac{\theta_{12}}{2} = \frac{m_H^2}{E_H^2},$$

che non è altro che la definizione di θ_{12}^{\min} .

Tutti i risultati di questa sezione sono validi per ogni decadimento in due corpi in cui le masse delle particelle figlie siano trascurabili, e in cui la dinamica del decadimento non rivesta un ruolo tale da introdurre anisotropie nelle distribuzioni angolari delle particelle nel sistema del centro di massa. Vedrete a partire dall'anno prossimo che spin e parità della particella che decade, e le leggi di conservazione che da questi dipendono, possono introdurre anisotropie – sostanzialmente legate alla presenza di termini di armoniche sferiche nella descrizione quantistica del decadimento.

1.6 Esercizi di riepilogo

Esercizio 11 Scritto luglio 2015, es. 1

Un fascio di neutrini muonici che interagisce con un bersaglio di materia può produrre muoni attraverso la reazione:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p.$$

1. Si determini l'energia di soglia dei neutrini per produrre la reazione su neutroni fermi.
2. Si determini l'impulso nel laboratorio del muone e del protone prodotti a soglia.
3. Si determini la velocità nel laboratorio del muone e del protone prodotti a soglia.
4. Si determini l'energia che deve avere il neutrino perché nella reazione il protone sia prodotto fermo.

Soluzione dell'esercizio 11

Se il neutrone è fermo, calcoliamo \sqrt{s} prima e dopo l'interazione nel sistema del laboratorio e nel centro di massa, rispettivamente, usando l'ipotesi di massa nulla del neutrino ($E_\nu = p_\nu$):

$$\sqrt{s} = \sqrt{(E_\nu + m_n)^2 - p_\nu^2} = \sqrt{2E_\nu m_n + m_n^2} = E_\mu^{(*)} + E_p^{(*)} \geq m_\mu + m_p,$$

da cui

$$E_\nu \geq \frac{(m_\mu + m_p)^2 - m_n^2}{2m_n} \approx 110 \text{ MeV}.$$

La produzione a soglia implica che muone e protone sono fermi nel centro di massa, e dunque nel laboratorio si muoveranno con la velocità con cui il centro di massa si muove rispetto al laboratorio:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{p_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{p_\nu}{E_\nu + m_n} \approx \frac{110 \text{ MeV}}{110 \text{ MeV} + 939.6 \text{ MeV}} = 0.105, \\ \gamma &= \frac{E_{\text{tot}}}{\sqrt{s}} = \frac{E_\nu + m_n}{m_\mu + m_p} \approx \frac{110 \text{ MeV} + 939.6 \text{ MeV}}{105.6 \text{ MeV} + 938.3 \text{ MeV}} = 1.0037, \\ \beta\gamma &= \frac{p_{\text{tot}}}{\sqrt{s}} = \frac{p_\nu}{m_\mu + m_p} \approx 0.1056, \end{aligned}$$

per cui ($c = 1$)

$$\begin{aligned} p_\mu &= m_\mu \gamma v_\mu = m_\mu \gamma \beta \approx 11 \text{ MeV}, \\ p_p &= m_p \gamma v_\mu = m_p \gamma \beta \approx 99 \text{ MeV}, \\ v_\mu &= \beta \approx 0.105, \\ v_p &= \beta \approx 0.105. \end{aligned}$$

Se invece vogliamo produrre il protone fermo, abbiamo che

$$\begin{aligned} E_\nu + m_n &= E_\mu + m_p, \\ p_\nu + 0 &= p_\mu + 0, \end{aligned}$$

da cui segue, prendendo i quadrati,

$$\begin{aligned} p_\mu + m_n &= \sqrt{m_\mu^2 + p_\mu^2} + m_p, \\ (p_\mu + (m_n - m_p))^2 &= m_\mu^2 + p_\mu^2, \\ p_\mu^2 + (m_n - m_p)^2 + 2p_\mu(m_n - m_p) &= m_\mu^2 + p_\mu^2, \end{aligned}$$

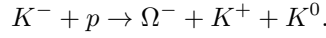
perciò

$$p_\mu = \frac{m_\mu^2 - (m_n - m_p)^2}{2(m_n - m_p)} \approx 4.3 \text{ GeV} = p_\nu.$$

Esercizio 12 Primo esonero 2017-2018, es. 1

Dati: $m(\Omega^-) = 1672 \text{ MeV}$, $m(p) = 938 \text{ MeV}$, $m(K^-) = m(K^+) = 494 \text{ MeV}$, $m(K^0) = 498 \text{ MeV}$, $m(\pi^-) = 140 \text{ MeV}$, $m(\Xi) = 1190 \text{ MeV}$.

La scoperta del barione Ω^- , nel 1964, sancì il trionfo del modello a quark. Nell'esperimento che portò alla sua scoperta, l' Ω^- venne prodotto facendo interagire un fascio di mesoni K^- con una camera a bolle riempita di idrogeno, tramite la reazione:



1. Calcolare l'energia di soglia della reazione, nel caso in cui il protone sia a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio.
2. Nella configurazione di soglia, calcolare la velocità del centro di massa β_{CM} .
3. Sempre nella configurazione di soglia, il barione Ω^- prodotto decade in $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$. Calcolare l'energia massima del pione nel sistema di riferimento solidale con il laboratorio.

Soluzione dell'esercizio 12

L'energia di soglia è quella per cui le particelle dello stato finale sono ferme nel sistema di riferimento del centro di massa. Eguagliando il quadrato dell'energia del centro di massa prima dell'urto nel laboratorio (dove l'energia del protone, che è fermo, è pari alla sua massa), e dopo l'urto nel centro di massa, abbiamo (usando $E^2 = p^2 + m^2$ e indicando con i pedici + e 0 le variabili riferite a K^+ e K^0)

$$\begin{aligned} s &= (E_K + m_p)^2 - p_K^2 = m_K^2 + m_p^2 + 2E_K m_p \\ &= (E_\Omega^{(*)} + E_+^{(*)} + E_0^{(*)})^2 \geq (m_\Omega + m_+ + m_0)^2, \end{aligned}$$

da cui

$$E_K \geq E_K^{\text{thr}} = \frac{(m_\Omega + m_+ + m_0)^2 - (m_K^2 + m_p^2)}{2m_K} \approx 3184 \text{ MeV}.$$

A soglia, il centro di massa si muove con velocità $\beta_{CM}c$, dove

$$\beta_{CM} = \frac{p^{\text{tot, thr}}}{E^{\text{tot, thr}}} = \frac{|\mathbf{p}_K^{\text{thr}} + \mathbf{0}|}{E_K^{\text{thr}} + m_p} = \frac{p_K^{\text{thr}}}{E_K^{\text{thr}} + m_p} = \frac{\sqrt{(E_K^{\text{thr}})^2 - m_K^2}}{E_K^{\text{thr}} + m_p} \approx 0.763.$$

La Ω^- prodotta a soglia è ferma nel riferimento del centro di massa, per cui si muove nel laboratorio proprio con velocità $\beta_{CM}c$. L'energia del pione del decadimento in due corpi della Ω^- la calcoliamo prima nel riferimento del centro di massa, dove l'energia del centro di massa si scrive (usando la conservazione dell'impulso spaziale, che impone che i due prodotti di decadimento siano back-to-back)

$$\sqrt{s} = m_\Omega = E_\Xi^{(*)} + E_\pi^{(*)} = \sqrt{m_\Xi^2 + (p^{(*)})^2} + \sqrt{m_\pi^2 + (p^{(*)})^2},$$

per cui

$$m_\Omega^2 + m_\pi^2 + (p^{(*)})^2 - 2m_\Omega \sqrt{m_\pi^2 + (p^{(*)})^2} = m_\Xi^2 + (p^{(*)})^2,$$

ovvero

$$-2m_\Omega E_\pi^{(*)} = m_\Xi^2 - (m_\Omega^2 + m_\pi^2),$$

per cui

$$E_\pi^{(*)} = \frac{(m_\Omega^2 + m_\pi^2) - m_\Xi^2}{2m_\Omega} \approx 418 \text{ MeV}.$$

L'energia nel laboratorio dipende tramite le trasformazioni di Lorentz dal boost della Ω^- e da energia e impulso (lungo la direzione del moto della Ω^- , pedice \parallel) del pione nel sistema del centro di massa:

$$\begin{aligned} E_\pi &= \gamma_{CM} \left(E_\pi^{(*)} + \beta_{CM} p_{\pi, \parallel}^{(*)} \right) = \gamma_{CM} \left(E_\pi^{(*)} + \beta_{CM} p_\pi^{(*)} \cos \theta^{(*)} \right) \\ &\leq \gamma_{CM} \left(E_\pi^{(*)} + \beta_{CM} \sqrt{E_\pi^{(*)2} - m_\pi^2} \right) \approx 1112 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Esercizio 13 Primo bonus 2017-2018 es. 1

Dati: $m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$; $m_\Lambda = 1116 \text{ MeV}/c^2$; $m_{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$; $m_{K^+} = 494 \text{ MeV}/c^2$; $\tau_{\pi^+} = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$.

1. Un fascio di mesoni K^+ viene inviato su un bersaglio di neutroni originando la reazione $K^+ + n \rightarrow \pi^+ + \Lambda$. Si determini:

- a) la minima energia E_{\min} nel laboratorio per il K^+ incidente affinché la reazione avvenga;
 b) se Λ è prodotto a riposo nel laboratorio, l'energia del K^+ incidente;
 c) la distanza media percorsa dai π^+ del punto b nel laboratorio prima di decadere.
2. Il pione del punto b decade secondo la reazione $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Siano θ e θ^* gli angoli rispetto alla linea di volo del pione a cui il neutrino viene emesso rispettivamente nel sistema di riferimento del laboratorio e in quello in cui il pione è in quiete.
- a) Determinare il valore di θ^* e θ per cui l'energia del neutrino nel laboratorio è pari alla metà del suo valore massimo.

Soluzione dell'esercizio 13

Poiché il neutrone è fermo, l'energia di soglia della reazione si trova da

$$s = (E_K + m_n)^2 - p_K^2 = m_K^2 + m_n^2 + 2m_n E_K \geq (m_\pi + m_\Lambda)^2,$$

$$E_K \geq \frac{(m_\pi + m_\Lambda)^2 - (m_K^2 + m_n^2)}{2m_n} \approx 239.3 \text{ MeV},$$

che è inferiore alla massa del K^+ , per cui la reazione può sempre avvenire.

Se la Λ è prodotta a riposo nel laboratorio, dalla conservazione di energia e impulso

$$E_K + m_n = E_\pi + m_\Lambda,$$

$$p_K = p_\pi,$$

perciò, usando $E^2 = p^2 + m^2$,

$$E_K + m_n - m_\Lambda = \sqrt{p_K^2 + m_\pi^2} = \sqrt{E_K^2 - m_K^2 + m_\pi^2},$$

da cui

$$E_K^2 + (m_n - m_\Lambda)^2 + 2E_K(m_n - m_\Lambda) = E_K^2 - m_K^2 + m_\pi^2,$$

ovvero

$$E_K = \frac{m_\pi^2 - m_K^2 - (m_n - m_\Lambda)^2}{2(m_n - m_\Lambda)} \approx 725 \text{ MeV},$$

corrispondente a un impulso $p_K = \sqrt{E_K^2 - m_K^2} \approx 532 \text{ MeV}$.

Il pione, quando l'iperone Λ è a riposo, nel laboratorio si muove con lo stesso impulso del K incidente, e percorre in media una distanza

$$L = (\beta c)(\gamma \tau_{\pi^+}) = \frac{pc}{m} \tau_{\pi^+} \approx \frac{532 \text{ MeV} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{140 \text{ MeV}} \times 2.6 \times 10^{-8} \text{ s} \approx 29.6 \text{ m}.$$

Il pione nel laboratorio ha $\beta = p/E = p/\sqrt{p^2 + m^2} \approx 0.967$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \approx 3.93$. Nel riferimento in cui il pione è fermo, dalla conservazione dell'impulso,

$$\sqrt{s} = m_\pi = E_\mu^{(*)} + E_\nu^{(*)} = \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_\mu^2} + E_\nu^{(*)},$$

$$m_\pi - E_\nu^{(*)} = \sqrt{(p^{(*)})^2 + m_\mu^2},$$

$$m_\pi^2 + (E_\nu^{(*)})^2 - 2m_\pi E_\nu^{(*)} = (p^{(*)})^2 + m_\mu^2 = (E_\nu^{(*)})^2 - m_\nu^2 + m_\mu^2,$$

$$E_\nu^{(*)} = \frac{m_\pi^2 + m_\nu^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 30 \text{ MeV}.$$

Nel riferimento del laboratorio il neutrino ha in generale una energia

$$E_\nu = \gamma \left(E_\nu^{(*)} + \beta p^{(*)} \cos \theta^{(*)} \right),$$

dove β e γ si riferiscono al pione, e $\theta^{(*)}$ è l'angolo rispetto alla direzione di volo del pione nel laboratorio (asse del boost di Lorentz), per cui la massima energia del neutrino vale

$$E_\nu^{\max} = \gamma \left(E_\nu^{(*)} + \beta p^{(*)} \right),$$

che si dimezza per un certo valore dell'angolo nel sistema del pione,

$$\frac{1}{2} E_\nu^{\max} = \frac{1}{2} \gamma \left(E_\nu^{(*)} + \beta p^{(*)} \right) \equiv \gamma \left(E_\nu^{(*)} + \beta p^{(*)} \cos \theta_{1/2}^{(*)} \right),$$

ovvero,

$$\theta_{1/2}^{(*)} = \arccos\left(\frac{\beta p^{(*)} - E_\nu^{(*)}}{2\beta p^{(*)}}\right) = \arccos\left(\frac{1 - \frac{E_\nu^{(*)}}{\beta p^{(*)}}}{2}\right).$$

Il neutrino ha massa nulla, perciò

$$\theta_{1/2}^{(*)} = \arccos\left(\frac{1 - \frac{1}{\beta}}{2}\right) = 1.59 \text{ rad},$$

e nel laboratorio, sempre perché $\beta_\nu = 1$,

$$\tan \theta_{1/2} = \frac{\sin \theta_{1/2}^{(*)}}{\gamma \left(\frac{\beta}{\beta_\nu} + \cos \theta_{1/2}^{(*)}\right)} = \frac{1}{\beta\gamma} \approx 0.268,$$

ovvero $\theta_{1/2} \approx 0.262 \text{ rad}$.

Esercizio 14 Primo esonero 2018-2019, es. 1

Dati: $m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$; $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$; $m_{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$.

- Si consideri la reazione: $p + p \rightarrow n + p + \pi^+$ per un fascio di protoni su un bersaglio fisso.
 - Si determini l'energia cinetica minima del protone incidente affinché la reazione possa avere luogo.
 - Si dimostri che il protone ed il π^+ non possono essere prodotti entrambi a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio.
- Si assuma ora che l'energia cinetica dei protoni incidenti sia pari a 1.25 GeV , e che la coppia $p\pi^+$ sia prodotta nello stato risonante Δ^{++} con massa pari a $1232 \text{ MeV}/c^2$, cioè il processo sia $p + p \rightarrow n + \Delta^{++}$ con $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+$. Si determinino, nel sistema di riferimento del laboratorio:
 - l'energia minima del neutrone;
 - l'angolo minimo tra il neutrone e lo stato risonante.

Soluzione dell'esercizio 14

- L'energia cinetica di soglia è data da:

$$K_{thr} = \frac{(m_n + m_p + m_\pi)^2 - 4m_p^2}{2m_p} = 295 \text{ MeV} \quad (10)$$

- Procedendo per assurdo, nell'assunzione che sia il protone che il pione nello stato finale siano prodotti a riposo, dalla conservazione dell'energia e dell'impulso abbiamo:

$$\begin{cases} E_p + m_p = E_n + m_p + m_\pi \\ |\mathbf{p}_p| = |\mathbf{p}_n| \end{cases} \quad (11)$$

da cui:

$$m_n^2 = E_n^2 - |\mathbf{p}_n|^2 = E_p^2 + m_n^2 - 2E_p m_\pi - |\mathbf{p}_p|^2 = m_p^2 + m_\pi^2 - 2E_p m_\pi \quad (12)$$

e quindi:

$$E_p = \frac{m_p^2 + m_\pi^2 - m_n^2}{2m_\pi} < m_p \quad (13)$$

$$(14)$$

- Il protone incidente ha energia totale $E_p = K_p + m_p$. Lo stato finale è equivalente a quello del decadimento a due corpi in $n + \Delta^{++}$ di una particella di massa pari all'energia nel centro di massa:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_p m_p} = 2422 \text{ MeV} \quad (15)$$

Il centro di massa si muove con $\gamma_{CM} = |E_p + m_p|/\sqrt{s} = 1.29$, $\beta_{CM} = 0.632$. Nel centro di massa, il neutrone e la Δ^{++} hanno energia ed impulso pari a:

$$E_n^* = \frac{s + m_n^2 - m_\Delta^2}{2\sqrt{s}} = 1080 \text{ MeV} \quad (16)$$

$$|\mathbf{p}_n^*| = \sqrt{E_n^{*2} - m_n^2} = 532 \text{ MeV}/c \quad (17)$$

L'energia minima nel sistema di laboratorio si ottiene quando, nel centro di massa, il neutrone è emesso all'indietro:

$$E_n^{min} = \gamma_{CM} (E_n^* - \beta_{CM} |\mathbf{p}_n^*|) = 960 \text{ MeV} \quad (18)$$

4. Nel centro di massa, il neutrone e la Δ^{++} si muovono con velocità:

$$\beta_n^* = \frac{|\mathbf{p}_n^*|}{E_n^*} = 0.492 \quad (19)$$

$$\beta_\Delta^* = \frac{|\mathbf{p}_n^*|}{\sqrt{|\mathbf{p}_n^*|^2 + m_\Delta^2}} = 0.396 \quad (20)$$

Poiché $\beta_n^* < \beta_{CM}$ e $\beta_\Delta^* < \beta_{CM}$, quando le due particelle sono emesse lungo la direzione del moto del centro di massa, sono entrambe emesse in avanti nel laboratorio, e quindi l'angolo minimo è pari a zero.

2 Sezione d'urto

2.1 Definizione

Se in un esperimento facciamo interagire un fascio di particelle A con oggetto fisico costituito da bersagli B , e poniamo un rivelatore in un certo punto dello spazio con lo scopo di misurare il numero di interazioni che si avranno nell'unità di tempo, il numero che misureremo sarà:

- tanto più alto quanto più è probabile che A e B interagiscano;
- tanto più alto quante più sono le particelle del bersaglio;
- tanto più alto quante più particelle di A incideranno sul bersaglio.

In termini concettuali, queste cose significano:

- dinamica dell'interazione, rappresentata dalla *sezione d'urto* del processo di interazione fra A e B ;
- natura del bersaglio (se B è un elettrone, ad esempio, un qualunque oggetto fisico avrà un certo numero di elettroni, che sappiamo stimare una volta nota la sua densità ed i numeri atomico e di massa del materiale di cui il bersaglio è costituito);
- *flusso* di particelle del fascio (cioè quante particelle attraversano una superficie unitaria nell'unità di tempo).

Questo ragionamento si estende facilmente al caso in cui non interagiscano un fascio e un oggetto fisico, bensì due fasci di particelle.¹⁶

In formule, scriviamo che il numero di interazioni (pedice i) che avvengono nell'unità di tempo è dato da

$$\frac{dN_i}{dt} = \sigma \phi_A N_B \equiv \sigma \mathcal{L},$$

dove σ è la sezione d'urto del processo, $\phi_A = \frac{1}{S} \frac{dN_A}{dt}$ è il flusso di particelle del fascio – che possiamo immaginare come un cilindro di una certa sezione S , N_B è il numero di bersagli nel bersaglio fisico, ed \mathcal{L} prende il nome di *luminosità*. Il fascio attraverserà una certa lunghezza d del bersaglio (un certo “spessore”), per cui spesso conviene scrivere il numero di bersagli in funzione della densità volumetrica di bersagli, $N_B = n_B S d$, per cui

$$\frac{dN_i}{dt} = \sigma \frac{1}{S} \frac{dN_A}{dt} N_B = \sigma \frac{1}{S} \frac{dN_A}{dt} n_B S d = \sigma \frac{dN_A}{dt} n_B d.$$

Altre volte è più conveniente lavorare con la densità di superficie dei bersagli (invece che di volume), ma l'idea è simile.

Per calcolare n_B basta chiedersi: “quanti *centri di diffusione B* ci sono in una unità di volume del mio bersaglio?”, e la risposta passa tendenzialmente per calcolare $\rho \frac{N_A}{A}$, dove N_A è il numero di Avogadro e ρ ed A sono densità e numero di massa del materiale di cui è fatto il bersaglio.¹⁷

La sezione d'urto si misura in multipli del barn, dove $1 \text{ b} = 1 \times 10^{-28} \text{ m}^2 = 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$.

¹⁶Conviene lavorare in quel caso in termini di luminosità, che si misura in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ e si scrive in funzione del numero di particelle nei due fasci, $N_{A,B}$, della loro sezione trasversa S e della loro frequenza di rivoluzione f_{rev} come

$$\mathcal{L} = \frac{N_A N_B}{S} f_{\text{rev}}.$$

¹⁷Ci va Z ? Non ci va Z ? Come abbiamo detto, dipende da cosa stiamo calcolando: se una sezione d'urto è calcolata per un processo in cui un fascio di protoni impatta sugli elettroni di un bersaglio producendo due particelle X ed Y , $p + e^- \rightarrow X + Y$, la densità di volume degli elettroni nel bersaglio sarà $\rho \frac{N_A}{A} Z$. Se invece la sezione d'urto si riferisce al processo $p + {}^{12}\text{C} \rightarrow X + Y$, basterà $\rho \frac{N_A}{A}$, e via dicendo.

2.2 Importanza in fisica delle particelle

La sezione d'urto di un processo è una misura della probabilità che quel processo avvenga. Dipende dalla dinamica dell'interazione che regola quel processo, attraverso la regola d'oro di Fermi,

$$\Gamma_{|i\rangle\rightarrow|f\rangle} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \rho(E_i),$$

che esprime il rate di transizione (ovvero la probabilità di transizione nell'unità di tempo) dallo stato iniziale $|i\rangle$ allo stato finale $|f\rangle$, $\Gamma_{|i\rangle\rightarrow|f\rangle}$, come il prodotto fra l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana di interazione (dinamica) e la densità degli stati (cinematica).

La sezione d'urto è dunque nei fatti il fattore di proporzionalità fra il prodotto tra flusso e numero di bersagli, e il numero di interazioni che effettivamente avvengono. La sezione d'urto è una caratteristica del processo che stiamo considerando: ad esempio, il processo



è caratterizzato da un certo valore di sezione d'urto $\sigma_{A+B\rightarrow C+D+E}$, che dipende dagli impulsi spaziali delle particelle in gioco – dopotutto, $\Gamma_{|i\rangle\rightarrow|f\rangle}$ dipende dagli impulsi.

Sperimentalmente noi misuriamo il numero di interazioni in rivelatori che sono collocati in certi punti dello spazio, e coprono perciò un certo angolo solido $d\Omega$ che in generale non è 4π . Ne segue che più propriamente noi dobbiamo spesso calcolare la *sezione d'urto differenziale* $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, che è una funzione che dipende dagli angoli polare e azimutale θ e ϕ con cui misuriamo nel laboratorio (in coordinate sferiche) la posizione di uno dei prodotti della reazione. La sezione d'urto differenziale, integrata su tutto lo spazio, restituisce la sezione d'urto totale,

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma(\Omega)}{d\Omega} = \int d\cos\theta d\phi \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega},$$

per cui il numero di particelle che misuriamo nell'unità di tempo in un certo rivelatore (pedice r) che copre un angolo solido $\Delta\Omega$ attorno al punto in cui A e B interagiscono, e che è collocato in una certa posizione nello spazio (θ, ϕ) , si scrive in generale come

$$\frac{dN_r}{dt} = \int_{\Delta\Omega} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \phi_A N_B = \int_{\Delta\Omega} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dN_A}{dt} n_B d.$$

Conviene vedere $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ come una funzione collegata a una densità di probabilità nello spazio, e la sezione d'urto totale come il suo integrale su tutto lo spazio. Questa funzione non è necessariamente isotropa: l'esempio più immediato è la sezione d'urto differenziale di Rutherford, che dipende dall'angolo polare di diffusione θ (diverge per θ piccoli).

La sezione d'urto ci permette poi di determinare facilmente quante particelle del fascio supereranno “indenni” uno spessore x di bersaglio: difatti, il flusso di particelle originario viene ridotto dopo aver attraversato uno spessore dx di bersaglio di

$$d\phi = -\phi d\mathcal{P} = -\phi\sigma n_B dx,$$

dove $d\mathcal{P}$ è la probabilità che una particella del fascio interagisca dopo aver attraversato uno spessore infinitesimo dx di bersaglio, e ϕ dipende da x . Integrando troviamo che dopo aver attraversato uno spessore finito x di bersaglio il fascio di particelle viene attenuato secondo la legge

$$\phi(x) = \phi(0)e^{-x\sigma n_B} = \phi(0)e^{-\frac{x}{\lambda}},$$

dove $\lambda = \frac{1}{\sigma n_B}$ prende il nome di *lunghezza di attenuazione*. Maggiore è la sezione d'urto di interazione fra fascio e bersaglio, o maggiore la densità di quest'ultimo, più improbabile sarà che il fascio superi imperturbato un certo spessore di bersaglio.

2.3 Esercizi di riepilogo

Esercizio 15 Primo bonus 2012-2013, es. 1

Dati: $A_{\text{Cu}} = 63$, $\rho_{\text{Cu}} = 8.9 \text{ g/cm}^3$.

Un fascio di particelle di sezione $S = 5 \text{ cm}^2$ incide su un blocco di rame di spessore $l = 0.7 \text{ cm}$:

1. calcolare il numero di nuclei intercettati dal fascio;
2. se la sezione d'urto totale è $\sigma = 20 \text{ mb}$, calcolare la frazione del fascio che viene diffusa.

Soluzione dell'esercizio 15

Il numero di nuclei di rame è dato da

$$N_{\text{Cu}} = n_{\text{Cu}} V_{\text{Cu}} = \rho_{\text{Cu}} \frac{N_A}{A_{\text{Cu}}} S l = 8.9 \text{ g/cm}^3 \frac{6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{63 \text{ g/mol}} \times 5 \text{ cm}^2 \times 0.7 \text{ cm} \approx 3 \times 10^{23}.$$

Il fascio viene parzialmente diffuso, a causa della sua interazione con il bersaglio: il suo flusso dopo uno spessore l vale

$$\phi(l) = \phi(0) e^{-\frac{l}{n_B \sigma}},$$

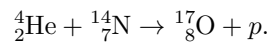
per cui

$$\phi(l)/\phi(0) = e^{-0.7 \text{ cm} \times 8.9 \text{ g/cm}^3 \times \frac{6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{63 \text{ g/mol}} \times 20 \text{ mb}} \approx 99.88\%,$$

per cui circa lo 0.12% del fascio è stato diffuso.

Esercizio 16 Primo esonero 2012-2013, es. 2

Un sottile bersaglio di $^{14}_7\text{N}$, spesso $d = 1.0 \text{ cm}$, è bombardato con un fascio di particelle α la cui corrente è $I = 15 \text{ nA}$. Viene quindi prodotta la seguente reazione nucleare:



Un rivelatore che copre un angolo solido $\Delta\Omega = 5 \times 10^{-3} \text{ sr}$ registra 23 protoni al secondo. Se l'urto è isotropo, determinare la sezione d'urto della reazione.

Dati: $\rho_{\text{N}} = 1.25 \text{ mg/cm}^3$.

Soluzione dell'esercizio 16

Il numero di protoni al secondo rivelati dal rivelatore si scrive come

$$\frac{dN_r}{dt} = 23 \text{ Hz} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \frac{dN_\alpha}{dt} n_B d.$$

L'intensità del fascio (particelle α al secondo) si può dedurre dalla corrente del fascio, visto che la carica delle particelle α è nota (e pari a $2e$):

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d2eN_\alpha}{dt} \rightarrow \frac{dN_\alpha}{dt} = \frac{i}{2e} = \frac{15 \times 10^{-9} \text{ A}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} \approx 4.7 \times 10^{10} \text{ Hz}.$$

La densità volumetrica di bersagli vale invece, visto che stiamo contando i nuclei di azoto del bersaglio per unità di volume,

$$n_B = \rho_{\text{N}} \frac{N_A}{A_{\text{N}}} = 1.25 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3 \times \frac{6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{14 \text{ g/mol}} \approx 5.4 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}.$$

Ne segue che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dN_r}{dt}}{\Delta\Omega \frac{dN_\alpha}{dt} n_B d} = \frac{23 \text{ Hz}}{5 \times 10^{-3} \text{ sr} \times 4.7 \times 10^{10} \text{ Hz} \times 5.4 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3} \times 1.0 \text{ cm}} \approx 1.8 \times 10^{-27} \text{ cm}^2/\text{sr} = 1.8 \text{ mb/sr},$$

per cui, usando l'ipotesi di isotropia,

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \times \int d\Omega = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx 23 \text{ mb}$$

Esercizio 17 Esercizi per casa 2020, es. 36

Un fascio di particelle α di 100 MeV di energia e 0.32 nA di corrente¹⁸ collide contro un bersaglio fisso di alluminio, spesso 1 cm. Una sperimentatrice prende un rivelatore di 1 cm \times 1 cm di superficie, e lo posiziona ad un angolo di 30° rispetto al fascio di particelle, a 1 m di distanza dal bersaglio. Quante particelle α incideranno sul rivelatore ogni secondo?

¹⁸Per una spiegazione breve su come (e perché) si misura la corrente di un fascio di particelle, vedi https://www.lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.beam_current. Una trattazione più completa è data ad esempio da <https://cds.cern.ch/record/1213275/files/p141.pdf>.

Soluzione dell'esercizio 17

L'alluminio ha una densità di 2.7 g/cm^3 , numero atomico 13 e massa atomica 27 u.

Le particelle α sono nuclei di elio: hanno carica $2e$ e la corrente di 0.32 nA corrisponde dunque a un miliardo di particelle incidenti al secondo,

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{0.32 \text{ nC/s}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 1 \times 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

Osserviamo poi che l'energia riportata è necessariamente l'energia cinetica T delle particelle α , visto che è inferiore alla loro massa.

Il rivelatore vede un angolo solido di

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\text{superficie}}{(\text{raggio})^2} = \frac{1 \text{ cm}^2}{(1 \text{ m})^2} = 1 \times 10^{-4} \text{ sr}$$

Si tratta di uno scattering alla Rutherford, per cui la sezione d'urto per unità di angolo solido rilevata ad un certo angolo θ vale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{z_\alpha z_{Al} e^2}{4\pi\epsilon_0 4T} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right)^2,$$

pari a

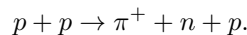
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &\approx \left(\frac{2 \times 13 \times e \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}{4\pi \times 8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m} \times 4 \times 100 \times 10^6 \text{ eV}} \frac{1}{\sin^2(\pi/180^\circ \times 30^\circ/2)} \right)^2 \\ &\approx 2 \times 10^{-30} \text{ m}^2/\text{sr} = 20 \text{ mb/sr}, \end{aligned} \quad (21)$$

e il numero di particelle visto dal rivelatore vale, se indichiamo con $n_{Al} = \rho_{Al} \frac{N_A}{A_{Al}}$ la densità numero di atomi di alluminio, e con d lo spessore del rivelatore,

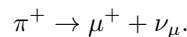
$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{rivelate}}}{dt} &= \Delta\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} n_{Al} d \frac{dN_i}{dt} \\ &\approx 1 \times 10^{-4} \text{ sr} \times 2 \times 10^{-30} \text{ m}^2/\text{sr} \times 1 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{m}^2 \times 2.7 \text{ g/cm}^3 \frac{6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{27 \text{ g/mol}} \\ &= 120 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Esercizio 18 Primo esonero 2017-2018, es. 2

Un fascio di muoni può essere prodotto a partire da un fascio di protoni nella seguente maniera. Prima si fa interagire il fascio di protoni con un bersaglio di tungsteno ($A = 184, Z = 74$), producendo pioni tramite la reazione:



Con uno spettrometro magnetico vengono selezionati i pioni carichi, e poi si lasciano viaggiare i pioni in un tunnel abbastanza lungo in maniera tale da dargli abbastanza tempo per decadere, producendo muoni tramite il decadimento:



1. Sapendo che il fascio di protoni ha una corrente $I_p = 0.05 \text{ mA}$ e una sezione $S = 10 \text{ cm}^2$, che il bersaglio ha una densità $\rho = 0.0193 \text{ kg/cm}^3$ e uno spessore $d = 2 \text{ cm}$, e che la sezione d'urto di produzione di pioni è pari a $\sigma(pp \rightarrow \pi^+ np) = 1.5 \text{ mb}$, calcolare il numero di pioni prodotti per unità di tempo.
2. Se i pioni vengono prodotti con una velocità media pari a $0.98c$ nella direzione dell'asse del tunnel, calcolare quanto deve essere lungo il tunnel di decadimento per pioni, per produrre un fascio di muoni di corrente pari a $I_\mu = 0.5 \mu\text{A}$ (la vita media del pione è pari a $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$. (Si considerino i muoni stabili ai fini di questo esercizio.)

Soluzione dell'esercizio 18

Visto che per ogni interazione viene prodotto un pione, il numero di pioni prodotti per unità di tempo è dato dal rate di interazioni:

$$\frac{dN_\pi}{dt} = \sigma \phi_p N_p = \sigma \frac{dN_i}{dt} n_p d,$$

dove ϕ_p è il flusso di protoni incidenti e N_p il numero di protoni nel bersaglio, $\frac{dN_i}{dt}$ è il numero di protoni del fascio incidente (pedice i) per unità di tempo, d lo spessore del bersaglio dato dal problema e n_p la densità di volume dei protoni del bersaglio. Quest'ultimo numero vale

$$n_p = Z\rho \frac{N_A}{A} = 74 \times 0.0193 \times 10^3 \text{ g/cm}^3 \frac{6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{184 \text{ g/mol}} \approx 4.66 \times 10^{24} \text{ cm}^{-3},$$

mentre possiamo trovare l'altro numero conoscendo la corrente del fascio di protoni, che hanno carica e :

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{i}{e} = \frac{0.05 \times 10^{-3} \text{ A}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 3.125 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \frac{dN_\pi}{dt} &= \sigma \frac{dN_i}{dt} n_p d \\ &\approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ b} \times 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{b} \times 3.125 \times 10^{14} \text{ Hz} \times 4.66 \times 10^{24} \text{ cm}^{-3} \times 2 \text{ cm} \\ &\approx 4.37 \times 10^{12} \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Questo rate corrisponde a una corrente

$$I_\pi = e \frac{dN_\pi}{dt} \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 4.37 \times 10^{12} \text{ Hz} \approx 0.70 \mu\text{A}.$$

Il numero di pioni esistenti in un certo istante t si scrive dalla legge di decadimento come

$$N_\pi(t) = N_\pi(t=0)e^{-\frac{t}{\gamma\tau}},$$

dove $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dipendono dalla velocità v dei pioni nel riferimento del laboratorio, e τ è la vita media del pione nel suo sistema di riferimento a riposo (data dal problema). La corrente del fascio di pioni segue la stessa legge di decadimento del numero di pioni (dopotutto sono uguali a meno di una costante, $N_\pi(t) = I_\pi(t)/e$), e il numero di muoni prodotti (e quindi la corrente di muoni prodotti) è per ipotesi uguale al numero di pioni decaduti (ci è stato detto di trascurare il decadimento del muone¹⁹). Il numero di pioni decaduti si può scrivere in funzione della distanza da questi percorsa, $x = vt = \beta ct$:

$$\begin{aligned} N_\mu(t) &= -(N_\pi(t) - N_\pi(0)) = N_\pi(0) \left(1 - e^{-\frac{t}{\gamma\tau}}\right) = N_\pi(0) \left(1 - e^{-\frac{x}{\beta c\gamma\tau}}\right), \\ I_\mu(t) &= I_\pi(0) \left(1 - e^{-\frac{x}{\beta c\gamma\tau}}\right), \end{aligned}$$

da cui possiamo inserire i valori per $x = 0$ (intensità di corrente di pioni a inizio tunnel) e $x = L$ (intensità di corrente di muoni a fine tunnel) per ricavare

$$L = -\beta c\gamma\tau \log\left(1 - \frac{I_\mu(L)}{I_\pi(0)}\right) \approx 0.98 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 5.025 \times 2.6 \times 10^{-8} \text{ s} \times \log\left(1 - \frac{0.5 \mu\text{A}}{0.70 \mu\text{A}}\right) \approx 48 \text{ m}.$$

Esercizio 19 Primo bonus 2017-2018, es. 2

1. Un bersaglio d'oro ($Z = 79, A = 197$) di densità superficiale $\rho_S = 0.97 \text{ mg/cm}^2$ e superficie $S_B = 1 \text{ cm}^2$ viene colpito da un fascio di particelle α , la cui sezione trasversa è contenuta completamente nell'area del bersaglio. Sul bersaglio impattano $3.7 \times 10^4 \alpha/\text{s}$. La sezione d'urto di diffusione elastica ad un certo angolo θ vale $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 1 \text{ b/sr}$. Calcolare:
 - a) la densità di atomi bersaglio per unità di superficie;
 - b) il numero di particelle α rivelate in un'ora da un rivelatore di superficie $S_R = 2 \text{ cm}^2$ posto all'angolo θ e a distanza $\Delta R = 0.1 \text{ m}$ dal bersaglio;
 - c) l'intensità di corrente del fascio.
2. Successivamente, il fascio di particelle viene sostituito da una sorgente radioattiva che emette lo stesso numero di particelle α al secondo con distribuzione isotropa su tutto l'angolo solido. La sorgente è posta sulla stessa linea del fascio a distanza $\Delta B = 20 \text{ cm}$ dal bersaglio.
 - a) Assumendo la stessa sezione d'urto di diffusione elastica, quanto tempo è necessario per rivelare con lo stesso rivelatore lo stesso numero di particelle del punto b)?

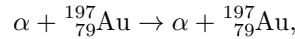
¹⁹E se non l'avessimo fatto?

Soluzione dell'esercizio 19

La densità di atomi di oro per unità di superficie sarà data dal prodotto fra la densità superficiale dell'oro (rapporto fra massa e superficie) e il numero di atomi di oro per unità di massa,

$$n_{\text{Au}} = \rho \frac{N_A}{A} = 0.97 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^2 \times \frac{6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{197 \text{ g/mol}} \approx 2.95 \times 10^{18} \text{ cm}^{-2}.$$

In un'ora viene rivelato un numero di particelle α , a seguito dell'interazione elastica



pari all'integrale su $\Delta t = 1 \text{ h}$ del rate di interazioni per unità di tempo,

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \int_0^{\Delta t} dt \frac{dN_\alpha}{dt} = \int_0^{\Delta t} dt \frac{dN_i}{dt} = \Delta t \frac{dN_i}{dt} \\ &= \Delta t \int_{\Delta\Omega} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dN_A}{dt} n_{\text{Au}} \approx \Delta t \Delta\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dN_A}{dt} n_{\text{Au}}, \end{aligned}$$

dove l'ultima approssimazione è quella consentita dal testo (sezione d'urto differenziale costante a quell'angolo θ), e l'angolo solido visto dal rivelatore è

$$\Delta\Omega = \frac{S_R}{\Delta R^2} = \frac{2 \text{ cm}^2}{(0.1 \text{ m})^2} = 0.02 \text{ sr}.$$

Ne segue che

$$N_\alpha \approx 3600 \text{ s} \times 0.02 \text{ sr} \times 1 \text{ b/sr} \times 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{b} \times 3.7 \times 10^4 \text{ s}^{-1} \times 2.95 \times 10^{18} \text{ cm}^{-2} = 7.86.$$

L'intensità di corrente del fascio vale

$$I_A = ze \frac{dN_A}{dt} = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 3.7 \times 10^4 \text{ s}^{-1} = 1.18 \times 10^{-14} \text{ A}.$$

Sostituire il fascio con una sorgente radioattiva posta a distanza ΔB fa sì che il rivelatore veda solo una frazione delle particelle emesse dalla sorgente, data dal rapporto fra l'angolo solido complessivo,

$$\Delta\Omega_A = \frac{S_B}{\Delta B^2} = \frac{1 \text{ cm}^2}{(20 \text{ cm})^2} = 0.0025 \text{ sr},$$

e 4π , pari a circa 1.9×10^{-4} . Il tempo necessario a rivelare lo stesso numero di interazioni è dunque

$$\frac{3600 \text{ s}}{1.9 \times 10^{-4}} \approx 5026 \text{ h}.$$

Esercizio 20 Primo esonero 2018-2019, es. 2

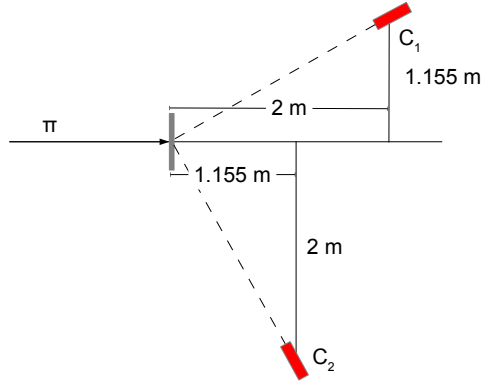
In un esperimento a bersaglio fisso, un fascio di pioni di corrente $I = 1 \text{ nA}$ incide su un bersaglio di grafite (C , $\rho_C = 2 \text{ g/cm}^3$, $Z_C = 6$, $A_C = 12$) di spessore $d = 1 \text{ cm}$. Si supponga che la sezione d'urto differenziale per la produzione di mesoni K^+ nell'interazione dei π^+ con un nucleo di carbonio possa essere scritta come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_0(1 + \alpha \cos \theta) \quad (22)$$

essendo θ l'angolo che il K^+ forma con la direzione del fascio. I K^+ sono rivelati da due contatori C_1 e C_2 disposti come in figura, di sezione circolare e raggio $r = 5 \text{ cm}$.

1. Si determini il valore di α , assumendo che il rapporto tra i conteggi nei due rivelatori sia pari a $R = N_1/N_2 = 0.756$.
2. Si determini il valore di σ_0 , assumendo che il primo rivelatore conti in media $0.5 K^+$ al secondo.
3. Si supponga di voler sostituire il bersaglio di grafite con un bersaglio di idrogeno liquido (H_2 , $\rho = 0.07 \text{ g/cm}^3$). Assumendo che la sezione d'urto di Eq. (22) sia la somma delle sezioni d'urto su singolo nucleone, uguali per neutrone e protone, quale sarà lo spessore d' necessario ad avere nei rivelatori la stessa rate di conteggi ottenuta col bersaglio di grafite?

Soluzione dell'esercizio 20



1. Entrambi i rivelatori sono alla stessa distanza dal bersaglio, $L = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + 1.155 \text{ m}^2} = 2.310 \text{ m}$ e quindi, avendo le stesse dimensioni, coprono lo stesso angolo solido $\Delta\Omega = \pi r^2/L^2 = 0.00147 \text{ sr}$. Il rapporto tra i conteggi nei due rivelatori sarà quindi semplicemente:

$$R = \frac{N_1}{N_2} = \frac{(1 + \alpha \cos \theta_1)}{(1 + \alpha \cos \theta_2)} \quad (23)$$

da cui:

$$\alpha = \frac{1 - R}{R \cos \theta_2 - \cos \theta_1} = -0.5 \quad (24)$$

avendo considerato che $\cos \theta_1 = 2 \text{ m}/L = 0.866$ e $\cos \theta_2 = 1.155 \text{ m}/L = 0.5$.

2. La sezione d'urto integrata sulla superficie del rivelatore 1 è data da:

$$\sigma_1 = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega = \sigma_0 (1 + \alpha \cos \theta_1) \Delta\Omega \quad (25)$$

La rate di eventi attesi sarà d'altronde:

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_\pi}{dt} \cdot \rho_C \frac{N_A}{A_C} \sigma_1 \cdot d \quad (26)$$

con $\frac{dN_\pi}{dt} = I/e$, e quindi:

$$\sigma_0 = \frac{\frac{dN_1}{dt}}{\frac{I}{e} \cdot \rho_C \frac{N_A}{A_C} d (1 + \alpha \cos \theta_1) \Delta\Omega} = 0.96 \mu\text{b/sr} \quad (27)$$

3. La sezione d'urto differenziale per singolo nucleone è:

$$\frac{d\sigma_N}{d\Omega} = \frac{1}{A_C} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (28)$$

Per l'idrogeno avremo quindi:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_\pi}{dt} \cdot \rho_H \frac{N_A}{A_H} \cdot A_H \frac{1}{A_C} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \cdot d' = \frac{dN_1}{dt} \frac{\rho_H}{\rho_C} \frac{d'}{d} \quad (29)$$

e quindi, per avere la stessa rate nei due casi, $d' = d \cdot \rho_C/\rho_H = 28.6 \text{ cm}$.

3 Interazione radiazione-materia

3.1 Panoramica

Una particella interagisce con la materia attraverso le quattro interazioni fondamentali (elettromagnetica, forte, debole, gravitazionale). La sezione d'urto (e quindi la probabilità) dei processi elettromagnetici e forti è quella significativamente dominante, per cui tendenzialmente la risposta alla domanda “Quanta energia perde una particella attraversando un oggetto fisico di un certo spessore” richiede una distinzione fra:

- particelle cariche, che perdono energia interagendo con gli elettroni (ionizzazione) o i nuclei (irraggiamento) del mezzo attraversato;
- fotoni, che sono particelle neutre ma interagiscono elettromagneticamente con o in presenza di nuclei ed elettroni del mezzo attraversato (principalmente per effetto fotoelettrico, effetto Compton e produzione di coppie);
- adroni, che – indipendentemente dalla loro carica – perdono energia per interazione forte con i nuclei del mezzo.

A questi processi di interazione radiazione-materia si affiancano, per particelle cariche, l'effetto Cherenkov (la cui perdita di energia è trascurabile rispetto alla ionizzazione) e la diffusione coulombiana multipla con i nuclei del mezzo (elastica, quindi senza perdita di energia).

3.1.1 Ionizzazione

Per particelle cariche diverse dagli elettroni, che interagiscono anelasticamente con gli elettroni atomici del mezzo che attraversano, la perdita media di energia per unità di spessore di materiale attraversato dx è pari a (*formula di Bethe*)

$$-\frac{dE}{dx} = C\rho\frac{Z}{A}\left(\frac{z}{\beta}\right)^2\left[\frac{1}{2}\log\frac{2m_e c^2(\beta\gamma)^2 W_{\max}}{\langle I \rangle^2} - \beta^2 - \delta(\beta)/2 - 2\frac{K(\langle I \rangle, \beta)}{Z}\right],$$

dove $C = 4\pi r_e^2 m_e c^2 \mathcal{N}_A \approx 0.307 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$, ρ è la densità del mezzo, Z ed A i suoi numeri atomico e di massa, z il rapporto fra la carica della particella incidente e la carica dell'elettrone, β la sua velocità e γ il suo fattore di Lorentz, W_{\max} l'energia cinetica massima rilasciata dalla particella incidente a un elettrone libero, $\langle I \rangle$ il potenziale di ionizzazione medio del mezzo, δ la correzione di densità e K la correzione di shell. L'energia cinetica massima dipende dal rapporto fra la massa dell'elettrone e quella della particella incidente M , attraverso

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}.$$

L'idea di base con cui si ricava la formula di Bethe è di trattare la collisione fra particella ed elettrone del mezzo come una collisione in cui gli elettroni sono a riposo rispetto alla particella incidente, che prosegue dopo ciascun urto praticamente indisturbata. La correzione $\delta/2$ tiene in conto il fatto che, per alte velocità della particella incidente, la polarizzazione del mezzo – indotta dal campo elettrico della particella incidente – riduce in maniera rilevante il volume in cui può avvenire la collisione elettrone-particella, e quindi la perdita di energia. A basse velocità diventa invece importante la correzione di shell K , che tiene in conto il fatto che l'approssimazione in cui l'elettrone è fermo non è più valida. K è funzione del potenziale medio di ionizzazione del mezzo e della velocità della particella incidente.

Per masse della particella incidente elevate rispetto a quella dell'elettrone, $W_{\max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ e la formula di Bethe si approssima come

$$-\frac{dE}{dx} = C\rho\frac{Z}{A}\left(\frac{z}{\beta}\right)^2\left[\log\frac{2m_e c^2(\beta\gamma)^2}{\langle I \rangle} - \beta^2 - \delta(\beta\gamma)/2\right].$$

Punti chiave:

- i valori calcolabili sono sempre valori medi, ma questi sono influenzati significativamente dalle code delle distribuzioni misurate di energia!
- la formula semplificata che si usa negli esercizi assume che la particella interagente sia molto più pesante dell'elettrone;
- si parla più di frequente di *stopping power* $\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$ (che si misura in MeV/gcm^2), che di $\frac{dE}{dx}$ (che si misura in MeV/cm): questo è dovuto al fatto che la formula di Bethe dipende principalmente dalla densità dei bersagli (“centri di diffusione”) incontrati dalla particella nel suo cammino nel mezzo, e questa quantità è molto simile nei vari materiali (Z/A è quasi sempre prossimo a $1/2$);

- la minima perdita di energia per ionizzazione non dipende significativamente dal materiale: vale sempre più o meno 2 MeV/gcm^2 , e il punto di minimo è $\beta\gamma \approx 3$; le particelle in questo regime sono dette MIP (*minimally-ionising particles*);
- la formula che descrive la perdita di energia per ionizzazione degli elettroni ha una forma più complessa, dovuta al fatto che particella incidente e particella del mezzo sono identiche, e che l'approssimazione di alta massa della particella incidente non è più valida; numericamente, però, i risultati sono molto simili (entro un 20%) per $\gamma \lesssim 100$.

L'energia persa può essere rivelata ad esempio amplificando il segnale degli elettroni liberati nella ionizzazione, oppure rivelando la luce di scintillazione liberata da stati eccitati durante la perdita di energia. L'energia media necessaria a produrre un portatore di segnale varia a seconda del mezzo, da circa 3 eV (rivelatori a semiconduttore) a 20 eV (cristalli scintillanti), 30 eV (gas nobili), 100 eV-1000 eV (scintillatori plastici).

3.1.2 Irraggiamento

Al di sopra di un certo valore di energia, detta *energia critica*, la perdita di energia di ionizzazione delle particelle cariche diviene di secondaria importanza rispetto alla perdita di energia per irraggiamento (o *bremstrahlung*), dovuta al fatto che la particella incidente è decelerata a causa della sua interazione elettromagnetica con i nuclei del mezzo attraversato. L'energia critica è una caratteristica del mezzo in cui la particella incidente si propaga, e si può approssimare come

$$E_c = \frac{800 \text{ MeV}}{Z + 1.2}.$$

Per energie maggiori di E_c , la perdita di energia si approssima come

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0},$$

dove X_0 è detta *lunghezza di radiazione* ed è anch'essa una caratteristica del mezzo attraversato: è definita come

$$\frac{1}{X_0} = 4r_e^2 \alpha \rho \mathcal{N}_A \frac{Z^2}{A} \log 183Z^{-\frac{1}{3}}.$$

Il suo valore si può approssimare come

$$X_0 \approx 180 \frac{A}{Z^2} \text{ g/cm}^2.$$

La lunghezza di radiazione X_0 può essere convenientemente espressa con le dimensioni di una lunghezza, dividendone il valore per la densità del mezzo.²⁰

La sezione d'urto di bremstrahlung va come

$$\sigma \propto \gamma^2,$$

con distribuzione differenziale

$$\frac{d\sigma}{dE} \propto \frac{1}{E}.$$

I fotoni di bremstrahlung emessi con maggiore probabilità sono quindi quelli di bassa energia. A causa della dipendenza della sezione d'urto da $\gamma^2 = E^2/m^2$, la bremstrahlung è un processo rilevante soprattutto per particelle di bassa massa come gli elettroni.

Esercizio 21

Un fascio di elettroni di 25 MeV vi colpisce la mano. Quanta energia rilascia nel primo mm della vostra pelle?

Soluzione dell'esercizio 21

Assumiamo che la densità della pelle sia quella dell'acqua, 1 g/cm^3 , con un potenziale medio di ionizzazione di 80 eV, una energia critica per l'elettrone di 80 MeV, una lunghezza di radiazione di 36.1 cm, $Z/A = 0.55$ e $\delta/2 = 4.5$ a 25 MeV.

L'elettrone ha $\beta = p/E \approx 1$, $\beta\gamma = p/m \approx 48.9$. Se approssimiamo la sua perdita di energia per ionizzazione con la formula di Bethe Bloch,

$$\frac{dE}{dx} = C\rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[\log \frac{2m_e c^2 (\beta\gamma)^2}{\langle I \rangle} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right],$$

²⁰Negli esercizi, attenzione alle dimensioni! Alle volte la lunghezza di radiazione viene fornita in cm, altre in g/cm^2 ...

abbiamo che

$$\Delta E_{\text{ion}} = \frac{dE}{dx} \Delta x \approx 0.307 \text{ g/cm}^2 \times 1 \text{ g/cm}^3 \times 0.55 \times \frac{1}{1^2} \times \left[\log \frac{2 \times 511 \text{ keV} \times (48.9)^2}{80 \text{ eV}} - 1^2 - 4.5 \right] \times 1 \text{ mm} \approx 236 \text{ keV}.$$

Si noti come l'elettrone non è troppo distante dal minimo di ionizzazione (per cui la perdita di energia per ionizzazione nella pelle sarebbe di 2 MeV/cm).

L'elettrone perde invece per irraggiamento, descritto da

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dx} &= \frac{E}{X_0}, \\ \frac{dE}{E} &= -\frac{dx}{X_0}, \\ \log \frac{E}{E_0} &= -\frac{x}{X_0}, \\ E &= E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}, \end{aligned}$$

per cui

$$\Delta E_{\text{irr}} = E - E_0 = E_0 \left(1 - e^{-\frac{x}{X_0}} \right) \approx 25 \text{ MeV} \times \left(1 - e^{-\frac{1 \text{ mm}}{36.1 \text{ cm}}} \right) \approx 69 \text{ keV}.$$

Questo è consistente col fatto che l'energia degli elettroni è sotto l'energia critica della pelle: la perdita di energia dominante avviene per ionizzazione, non per irraggiamento.

Esercizio 22

Provate a schermare lo stesso fascio di elettroni di 25 MeV con del piombo. Quanto deve essere spesso affinché l'energia del fascio scenda sotto l'energia critica? E per fermarlo completamente? (Si lavori in maniera approssimata.)

Soluzione dell'esercizio 22

Il motivo per cui è interessante porsi questa domanda è perché, quando l'energia di un elettrone è sopra l'energia critica, si innesca un processo a cascata, denominato *sciame elettromagnetico*, in cui i fotoni prodotti per irraggiamento producono a loro volta coppie elettrone-positrone, che a cascata producono altri fotoni sempre per irraggiamento. Lo sciame si spegne quando le particelle hanno energie inferiori all'energia critica del mezzo.

Assumiamo che la densità del piombo sia 11 g/cm^3 , con un potenziale medio di ionizzazione di 823 eV, una energia critica per l'elettrone di 7.4 MeV, una lunghezza di radiazione di 0.56 cm, $Z/A = 0.4$ e $\delta/2 = 0.3$ a 25 MeV. La richiesta è che

$$\Delta E = E_0 - E_C(\text{Pb}) = 25 \text{ MeV} - 7.4 \text{ MeV} = 17.6 \text{ MeV},$$

e se assumiamo che la perdita di energia avvenga principalmente per irraggiamento abbiamo

$$\frac{E_0 - \Delta E}{E_0} = e^{-\frac{\Delta x}{X_0}},$$

per cui

$$\Delta x = -X_0 \log \left(\frac{E_0 - \Delta E}{E_0} \right) \approx -0.56 \text{ cm} \times \log \left(\frac{7.4 \text{ MeV}}{25 \text{ MeV}} \right) \approx 6.8 \text{ mm}.$$

Per fermare completamente gli elettroni serve più piombo: un modo conservativo²¹ di calcolare quanto è assumere che gli elettroni raggiungano velocità nulla, a partire da 7.4 MeV, perdendo energia tramite ionizzazione come MIP: usando la formula di Bethe-Bloch si ha, visto che stavolta $\beta\gamma = 3$ implica $\beta = 0.9487$,

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta E}{\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}} \approx \frac{7.4 \text{ MeV} - 511 \text{ keV}}{0.307 \text{ MeV/gcm}^2 \times 0.4 \times \frac{1}{0.9487^2} \times \left[\log \frac{2 \times 511 \text{ keV} \times (48.9)^2}{823 \text{ eV}} - 0.9487^2 - 0.3 \right] \times 11 \text{ g/cm}^3} \\ &\approx \frac{6.889 \text{ MeV}}{12.2 \text{ MeV/cm}} \approx 6.0 \text{ mm}. \end{aligned}$$

²¹È in altri termini una sottostima: la definizione stessa di MIP...

3.1.3 Effetto Cherenkov

Se la velocità di una particella carica in un mezzo di indice di rifrazione n è maggiore di quella della luce in quel mezzo, cioè se $\beta > \frac{1}{n}$, allora viene emessa radiazione Cherenkov in una direzione che forma un angolo θ_c con la direzione della particella incidente, dato dalla relazione

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}.$$

La perdita di energia per unità di lunghezza si esprime in funzione del rapporto tra la carica della particella incidente e quella dell'elettrone, z , e dell'integrale lungo lo spettro delle frequenze della radiazione emessa:

$$\frac{dE}{dx} = z^2 \frac{\alpha \hbar}{c} \int d\omega \omega \sin^2 \theta_c(\omega).$$

Il numero di fotoni con lunghezza d'onda $d\lambda$, rivelati dopo che la particella incidente ha attraversato un cammino dx , è pari a

$$\frac{\partial^2 N_\gamma}{\partial x \partial \lambda} = \frac{2\pi \alpha z^2}{\lambda^2} \sin^2 \theta_c(\lambda).$$

Un rivelatore reale è sensibile a fotoni entro un certo intervallo di lunghezze d'onda $[\lambda_1, \lambda_2]$, per cui si usa piuttosto

$$\frac{dN_\gamma}{dx} = 2\pi \alpha z^2 \langle \sin^2 \theta_c \rangle \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Esercizio 23

Quanti fotoni produce nel visibile una particella di carica $z = 1$ per centimetro di mezzo attraversato?

Soluzione dell'esercizio 23

Lo spettro visibile è fra 300 nm e 500 nm, cui corrisponde pertanto un numero di fotoni attorno a 500 per cm, da confrontarsi con i 10^5 elettroni per cm che si avrebbero per ionizzazione per una particella al minimo di ionizzazione.

3.1.4 Diffusione coulombiana multipla

Le particelle cariche possono anche interagire elasticamente con i nuclei atomici del mezzo che attraversano: più sarà spesso il mezzo, maggiore sarà il numero di volte che la particella diffonderà su un nucleo. La trattazione di ogni singola interazione coulombiana è la stessa dello scattering Rutherford: poiché la sezione d'urto di Rutherford diverge per angolo nullo (va come $1/\sin^4(\theta/2)$), dopo molti urti l'angolo medio di diffusione nello spazio è zero, mentre in generale sarà diversa da zero la varianza di quest'angolo²². Se L è la distanza percorsa dalla particella nell'attraversare il mezzo, βc e $|\mathbf{p}|$ la velocità e il modulo dell'impulso della particella, e X_0 la lunghezza di radiazione del mezzo, si ha che²³

$$\sqrt{\langle \theta_{\text{spazio}}^2 \rangle} \approx z \frac{21 \text{ MeV}}{\beta c |\mathbf{p}|} \sqrt{\frac{L}{X_0}}.$$

L'angolo medio di diffusione proiettato sul piano ortogonale alla traiettoria è invece dato da

$$\sqrt{\langle \theta_{\text{piano}}^2 \rangle} = \frac{\sqrt{\langle \theta_{\text{spazio}}^2 \rangle}}{\sqrt{2}}.$$

Si veda la definizione grafica in figura 3.

Esercizio 24

Un muone di 1 TeV di energia incide verticalmente su una montagna.

1. Quanta energia perde dopo il primo cm di roccia attraversata?
2. Quanto deve essere spessa la montagna per fermare il muone? (rispondere in maniera approssimata)
3. Quanto si allarga il fascio di muoni che incide verticalmente sulla montagna (dello spessore identificato al punto precedente)?

²²In altri termini, un fascio originariamente collimato manterrà la sua direzione originaria, ma si allargherà.

²³Questa trattazione è valida quando il numero di singole diffusioni è maggiore di $\gtrsim 20$, cioè quando il mezzo è sufficientemente spesso.

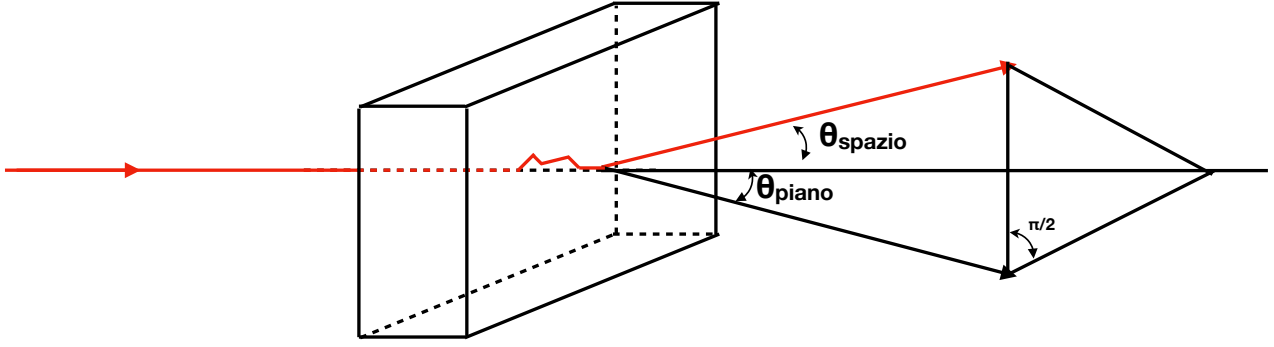


Figura 3: Definizione degli angoli θ_{spazio} e θ_{piano} .

Soluzione dell'esercizio 24

Il muone ha $\beta = p/E \approx 1$ e $\beta\gamma = p/m \approx 9500$. La roccia ha una densità di circa 3 g/cm^3 , e possiamo assumere $Z/A \approx 1/2$. Con un potenziale medio di ionizzazione $\langle I \rangle = 200 \text{ eV}$ abbiamo una perdita di energia

$$\Delta E = \frac{dE}{dx} \Delta x \approx 1 \text{ cm} \times 0.307 \text{ MeV/gcm}^2 \times 3 \text{ g/cm}^3 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \times \left(\log \frac{2 \times 511 \text{ keV} \times (9500)^2}{200 \text{ eV}} - 1^2 \right) \approx 12 \text{ MeV}.$$

Il muone si ferma quando la sua energia passa da 1 TeV a $m_\mu \approx 105.6 \text{ MeV}$, ovvero quando ha perso

$$\Delta E = 1 \text{ TeV} - 105.6 \text{ MeV} \approx 999894.4 \text{ MeV}.$$

Se assumiamo il muone come una particella al minimo di ionizzazione (MIP),²⁴

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} &\equiv 2 \text{ MeV/gcm}^2, \\ \frac{dE}{dx} &= 6 \text{ MeV/cm}, \end{aligned}$$

per cui dalla richiesta che $\Delta E = \frac{dE}{dx} \Delta x$ abbiamo

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{\frac{dE}{dx}} \approx \frac{999894.4 \text{ MeV}}{6 \text{ MeV/cm}} \approx 1666 \text{ m}.$$

La roccia ha $X_0 \approx 25 \text{ g/cm}^2$, per cui nel piano ortogonale alla traiettoria il fascio di muoni si sarà allargato di

$$\sqrt{\theta_{\text{piano}}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 21 \text{ MeV} \times \frac{1}{1 \times 1 \text{ TeV}} \times \sqrt{\frac{1666 \text{ m}}{25 \text{ g/cm}^2 / 3 \text{ g/cm}^3}} \approx 2.1 \text{ mrad},$$

corrispondente a una larghezza a terra, se h è l'altezza della montagna, pari a

$$\Delta y = h \tan \left(\sqrt{\theta_{\text{piano}}^2} \right) \approx 1666 \text{ m} \times \tan(2.1 \text{ mrad}) \approx 3.5 \text{ m}.$$

3.1.5 Channeling

Una particella carica che attraversa un materiale con una struttura spaziale regolare (ad esempio un cristallo) incidendovi con un certo angolo può rimanere incanalata in una traiettoria in cui il numero di elettroni che incontra è significativamente inferiore a quelli che incontrerebbe seguendo una traiettoria differente. Questo fenomeno, detto *channeling*, ha luogo per velocità basse ($\beta \approx 0.1$) e angoli critici attorno a 1° , sempre più piccoli tanto più la particella è energetica.

²⁴In linea di principio avremmo dovuto integrare $\frac{dE}{dx}$ a mano a mano che la velocità del muone diminuiva attraversando la roccia – cosa che nella pratica si fa con metodi numerici e simulazioni Monte Carlo dettagliate dell'interazione radiazione-materia (ad esempio GEANT4, <https://geant.org>).

3.2 Esercizi di riepilogo

Esercizio 25 Esercizi per casa 2020, es. 42

Un protone interagisce con un bersaglio, producendo un pione di energia $E = 300 \text{ MeV}$. Con un tracciatore, posto a distanza $d = 6 \text{ cm}$ dal bersaglio, è possibile rivelare la traiettoria del pione e risalire al punto di produzione del pione sul bersaglio. Determinare l'errore sulla misura della posizione di tale punto, causato dalla presenza di un piano di alluminio di spessore $L = 0.5 \text{ mm}$, posto immediatamente davanti al tracciatore (quindi a distanza d dal bersaglio), nell'ipotesi che gli angoli delle tracce rispetto alla normale alle superfici del bersaglio e del piano di alluminio siano piccoli. [$m_\pi = 139.6 \text{ MeV}$; Al: ($Z = 13$, $A = 27$, $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$)]

Soluzione dell'esercizio 25

La deviazione standard dell'angolo di diffusione coulombiana multipla vale

$$\sqrt{\langle\theta^2\rangle} = 21 \text{ MeV} \frac{z}{\beta c |\mathbf{p}|} \sqrt{\frac{x}{X_0}} = 21 \text{ MeV} \frac{z}{\beta c |\mathbf{p}|} \sqrt{\frac{L\rho}{X_0}},$$

dove $p = \sqrt{E^2 - m_\pi^2} = 266 \text{ MeV}$, $\beta = p/E = 0.885$, $z = 1$. Per l'alluminio abbiamo

$$X_0 = 24 \text{ g/cm}^2 \rightarrow X_0/\rho = 8.9 \text{ cm},$$

per cui

$$\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \approx 0.0067,$$

e lo spostamento medio corrispondente rispetto alla posizione nominale è

$$\Delta s = \tan\left(\frac{0.0067}{\sqrt{2}}\right) \times 6 \text{ cm} = 0.28 \text{ mm}.$$

Esercizio 26 Esercizi per casa 2020, es. 43

Un fascio misto di elettroni e antiprotoni passa attraverso una regione con $B = 2 \text{ T}$ e, dopo aver curvato per $R = 3 \text{ m}$, raggiunge una regione senza campo magnetico.

1. Qual è l'impulso delle particelle selezionate?
2. Come discriminereste fra i due tipi di particelle?
3. Se usaste due scintillatori posti a 15 m di distanza, quale risoluzione temporale sarebbe necessaria per discriminare i due tipi di particelle?
4. Se i due scintillatori fossero spessi 2 cm e avessero una lunghezza di radiazione $X_0 = 40 \text{ cm}$, quanta energia perderebbero elettroni e protoni nell'attraversarli? Si assuma una perdita di energia per ionizzazione di 2 MeV/cm e 2.5 MeV/cm per protoni ed elettroni, rispettivamente.
5. Che indice di rifrazione dovrebbe avere un rivelatore a luce Cherenkov per discriminare elettroni e protoni?

Soluzione dell'esercizio 26

Dalla definizione di forza,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$
$$|\mathbf{F}| = m \frac{v^2}{R},$$

per cui, se il campo magnetico è ortogonale alla traiettoria,

$$pc = qcBR,$$

che, poiché $c = 0.3 \text{ m/ns}$, possiamo esprimere in maniera più conveniente come

$$pc[\text{GeV}] = 0.3B[\text{T}]R[\text{m}].$$

Ne segue che, nel nostro esercizio (e tornando a $c = 1$),

$$p = 1.8 \text{ GeV}.$$

Trascurando le perdite di energia, e ricordando che $m_e \ll m_p$, i tempi di volo di elettroni e protoni valgono rispettivamente

$$t_e = \frac{L}{\beta_e c} \approx \frac{L}{c} \approx 50 \text{ ns},$$

e

$$t_p = \frac{L}{\beta_p c} = \frac{L}{\frac{p}{\sqrt{p^2 + m_p^2}} c} \approx 56 \text{ ns},$$

per cui serve una risoluzione dell'ordine del ns per discriminare elettroni e muoni dal tempo di volo.

Se gli scintillatori sono spessi 2 cm, i protoni perderanno in ciascuno di essi $2 \text{ cm} \times 2 \text{ MeV/cm} = 4 \text{ MeV}$ per ionizzazione. Gli elettroni perderanno invece, nel primo rivelatore, 5 MeV per ionizzazione e ($m_e \approx 0$)

$$1.8 \text{ GeV} \times \left(1 - \exp\left(-\frac{2 \text{ cm}}{40 \text{ cm}}\right)\right) \approx 88 \text{ MeV},$$

cioè dopo il primo rivelatore avranno $1.8 \text{ GeV} - 93 \text{ MeV}$ di energia, e nel secondo ne perderanno altri

$$5 \text{ MeV} + (1.8 \text{ GeV} - 93 \text{ MeV}) \left(1 - \exp\left(-\frac{2 \text{ cm}}{40 \text{ cm}}\right)\right) \approx 88 \text{ MeV}.$$

L'angolo di emissione di luce Cherenkov è dato da

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n} \leq 1,$$

e poiché $\beta_e \approx 1$, $\beta_p \approx 0.887$, per avere luce Cherenkov solo al passaggio degli elettroni (e non dei protoni) è necessario che

$$1 < n < 1.13.$$

Esercizio 27 Secondo bonus 2011/2012, es. 2

Ipotizziamo che del bosone Z , di massa $M_Z = 91.188(2) \text{ GeV}/c^2$ e vita media $\tau_Z = 2.64 \times 10^{-25} \text{ s}$, abbiamo misurato le larghezze dei due modi di decadimento visibili: decadimento in adroni, $\Gamma_h = 1744 \text{ MeV}$; decadimento in leptoni, $\Gamma_l = 84 \text{ MeV}$. Una nuova misura dà come risultato indiretto per i modi di decadimento invisibili (neutrini o altro) $\Gamma_{\text{inv}} = 900 \text{ MeV}$.

1. Calcolare il valore della larghezza totale Γ dello Z ;
2. dire se la nuova misura è compatibile con i risultati precedenti e perché;
3. dire quanto è grande la incertezza intrinseca, definita come larghezza a mezza altezza, sul valore della massa dello Z .

Soluzione dell'esercizio 27

La larghezza totale vale

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau_Z} = \frac{\hbar c}{\tau_Z c} \approx \frac{197 \text{ MeVfm}}{2.64 \times 10^{-25} \text{ s} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx 2.48 \text{ GeV}.$$

La misura implica che

$$\Gamma_{\text{mis}} = \Gamma_h + \Gamma_l + \Gamma_{\text{inv}} = 1744 \text{ MeV} + 84 \text{ MeV} + 900 \text{ MeV} = 2.728 \text{ GeV},$$

ed è quindi incompatibile con 2.48 GeV.

La larghezza a mezza altezza della Lorenziana è proprio Γ_{tot} .

3.3 Esercizi di riepilogo

Esercizio 28 Appunti 2020, es. 16

Un fascio di particelle di energia pari a $E = 1.4 \text{ GeV}$ è prodotto dalla collisione di protoni su una targhetta fissa. Il fascio prodotto contiene protoni ed elettroni. Le particelle sono identificate misurando il tempo di volo tra due scintillatori plastici, distanti fra loro $L = 10 \text{ m}$.

1. Determinare il tempo di volo misurato dai due scintillatori per i due tipi di particelle (si assuma che fra i due scintillatori ci sia il vuoto).
2. Determinare l'energia perduta dalle due particelle nei 10 m di volo, assumendo, in questo caso, che fra i due scintillatori sia posta una lastra di materiale di densità $\rho = 2.1 \text{ g/cm}^3$, lunghezza di radiazione $X_0 = 20 \text{ cm}$, $Z/A = 0.5$, $\langle I \rangle = 300 \text{ eV}$ e spessore $\Delta x = 10 \text{ cm}$.
3. Si assuma che il secondo scintillatore sia schematizzabile come un cerchio di raggio R , posto ortogonalmente alla direzione di volo delle particelle. Stimare il valore di R necessario per contenere le particelle, dei due tipi, che fanno scattering coulombiano multiplo nella lastra.

4. Proporre una metodologia alternativa alla misura del tempo di volo per la misura delle due particelle, attraverso rivelatori Cherenkov.

Soluzione dell'esercizio 28

Finché non raggiungono la lastra di materiale, i protoni hanno

$$\beta_p = \frac{p_p}{E} = \frac{\sqrt{E^2 - m_p^2}}{E} = 0.742, \quad \gamma_p = \frac{E}{m_p} = 1.49,$$

mentre gli elettroni hanno

$$\beta_e = \frac{p_e}{E} \approx 1, \quad \gamma_e = \frac{E}{m_e} \approx 2740.$$

- Il tempo impiegato a percorrere 10 m per protoni ed elettroni, se fra i due scintillatori c'è il vuoto, vale $L/(\beta c)$, cioè rispettivamente 44.9 ns e 33 ns.
- I protoni ($z = 1$) perderanno energia nella lastra, tramite ionizzazione:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \rho \Delta x \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \\ &= 2.1 \text{ g/cm}^3 \times 10 \text{ cm} \times 0.307 \text{ MeV/gcm}^2 \times \left(\frac{Z}{A}\right) \left(\frac{z}{\beta_p}\right)^2 \left[\log \left(\frac{2m_e c^2 (\beta_p \gamma_p)^2}{\langle I \rangle} \right) - \beta_p^2 \right] \\ &\approx 45.8 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

mentre gli elettroni perderanno energia principalmente per bremsstrahlung,

$$\Delta E_e \approx E - E \exp\left(-\frac{\Delta x}{X_0}\right) \approx 551 \text{ MeV}.$$

- Il tempo impiegato dal protone a percorrere la distanza L è dato dalla somma del tempo necessario a raggiungere la lastra (assumiamo che $\Delta x \ll L$),

$$t_1^p \approx \frac{L/2}{\beta_p c} \approx 22.5 \text{ ns},$$

e del tempo necessario a raggiungere, con velocità

$$\beta'_p c = \frac{\sqrt{(E - \Delta E_p)^2 - m_p^2}}{E - \Delta E_p} c \approx 0.721c,$$

il secondo scintillatore,

$$t_2^p \approx \frac{L/2}{\beta'_p c} \approx 23.1 \text{ ns}.$$

Il tempo di volo totale tra i due scintillatori sarà dunque, nel caso del protone,

$$\Delta t_p \equiv t_1^p + t_2^p \approx 45.6 \text{ ns},$$

mentre nel caso dell'elettrone – per cui $\beta'_e \approx \beta_e$ – si ha

$$\Delta t_e \approx \frac{L}{\beta_e c} \approx \frac{L}{c} \approx 33 \text{ ns}.$$

Si noti come sono necessari rivelatori con precisioni temporali dell'ordine di qualche ns, per discriminare due tipi di particelle tramite misura del tempo di volo.

- Per lo scattering coulombiano multiplo, usando nel calcolo il valore di impulso che hanno protoni ed elettroni quando entrano nella lastra, si ha una deviazione angolare media nello spazio di

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle_p &\approx \frac{21 \text{ MeV}}{\beta_p c |\mathbf{p}_p|} \sqrt{\frac{\Delta x}{X_0}} \approx 19 \text{ mrad}, \\ \langle \theta \rangle_e &\approx \frac{21 \text{ MeV}}{\beta_e c |\mathbf{p}_e|} \sqrt{\frac{\Delta x}{X_0}} \approx 11 \text{ mrad}. \end{aligned}$$

La deflessione indotta dallo scattering multiplo dopo il tragitto $L/2$ sarà dunque

$$R_p = L/2 \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\theta\rangle_p\right) \approx 6.7 \text{ cm},$$

$$R_e = L/2 \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\theta\rangle_e\right) \approx 3.9 \text{ cm},$$

per cui $R_p > R_e$ ci dà una misura di quanto dev'essere il raggio del secondo scintillatore per poter rivelare entrambe le particelle. Più precisamente, il calcolo della diffusione multipla ci dà una stima della *deviazione standard* della distribuzione degli angoli di diffusione nello spazio (qualcosa di simile all'angolo per cui il 68% delle particelle sarebbe contenuto in un cerchio di raggio R), quindi nel mondo reale sarà consigliabile dotarsi di un rivelatore un po' più alto di così.

- L'ovvia alternativa per costruire un apparato che discrimini elettroni da protoni è usare un rivelatore Cherenkov, con un indice di rifrazione tale che solo particelle con β maggiore di β'_p (e prossimo a $\beta_e \approx 1$) diano un segnale.

Esercizio 29 Secondo esonero 2011/2012, es. A1

In una macchina a fasci incrociati, sono prodotti elettroni e muoni i cui impulsi vengono misurati in una camera tracciante, con simmetria cilindrica intorno alla direzione dei fasci, di raggio $r = 1.6$ m, immersa in un campo magnetico $B = 1.2$ T parallelo alla direzione dei fasci. Il materiale dei rivelatori della camera ha uno spessore totale di 0.6 lunghezze di radiazione, che si può considerare uniformemente distribuito tra la zona di interazione e la superficie esterna del cilindro. Trascurando le perdite per ionizzazione e la radiazione di sincrotrone:

1. si calcoli il minimo valore dell'impulso trasverso (ossia la componente dell'impulso sul piano ortogonale alla direzione dei fasci) per il quale i muoni fuoriescono dalla camera;
2. si calcoli il raggio di curvatura iniziale degli elettroni prodotti con impulso $p = 45$ GeV sul piano ortogonale alla direzione dei fasci, e quello all'uscita dalla camera.

Soluzione dell'esercizio 29

Il raggio di curvatura R dipende dalla componente dell'impulso dei muoni trasversa alla loro direzione di moto tramite

$$p_T = 0.3zBR,$$

con $z = 1$, p in GeV, B in T ed r in m. L'esercizio chiede che p_T sia tale che $R = r/2$, per cui

$$p_T \approx 0.3 \text{ GeV/T/m} \times 1 \times 1.2 \text{ T} \times \frac{1.6 \text{ m}}{2} = 288 \text{ MeV}.$$

Gli elettroni all'inizio della camera hanno un raggio di curvatura pari a

$$R = \frac{p}{0.3zB} = \frac{45 \text{ GeV}}{0.3 \text{ GeV/T/m} \times 1 \times 1.2 \text{ T}} = 125 \text{ m},$$

e poi perdono energia $E \approx p$ per irraggiamento, arrivando a

$$E = E_0 e^{-x/X_0} = 45 \text{ GeV} \times e^{-0.6} \approx 24.7 \text{ GeV},$$

che corrisponde a un raggio di 68.6 m, maggiore delle dimensioni della camera.

Esercizio 30 Secondo bonus 2016/2017, es. 1

Dati: $m_e = 0.511$ MeV/c²; $m_\mu = 105$ MeV/c²; Per il piombo: $X_0 = 0.56$ cm, $\rho = 11.35$ g/cm³, $I = 823$ eV, $Z = 82$, $A = 207$.

1. In una camera di Wilson di raggio $R = 25$ cm, con campo magnetico $B = 1.5$ T ed equipaggiata con una lastra di piombo orizzontale di spessore $1X_0$ posta a metà altezza, una particella diretta lungo la verticale entra nel punto più alto della camera e descrive una circonferenza con raggio di curvatura $r_1 = 67$ cm.
 - a) Si determini l'angolo rispetto alla verticale con cui la particella entra nella lastra.
2. Al di sotto della lastra la particella descrive una circonferenza con raggio di curvatura $r_2 = 65$ cm.
 - a) Dalla differenza tra gli impulsi misurati prima e dopo la lastra si stabilisca se la particella è un muone o un elettrone.

b) Si determini l'angolo medio di diffusione coulombiana multipla nel piano verticale nell'attraversare la lastra.

Soluzione dell'esercizio 30

Dal raggio di curvatura r_1 si ricava l'impulso della particella

$$pc = 0.3Br_1 = 301.5 \text{ MeV}$$

L'angolo θ sotteso dall'arco di circonferenza percorso è

$$\sin(\theta) \sim \theta = R/r_1 = 0.37 \text{ rad}$$

Quest'angolo è uguale all'angolo rispetto alla verticale con cui la particella entra nella lastra. La distanza percorsa dalla particella nella lastra è $x = 1X_0/\cos(\theta) = 0.6 \text{ cm}$.

Per un elettrone di impulso $301.5 \text{ MeV}/c$ vale l'approssimazione $E \sim cp = 301.5 \text{ MeV}$. Un elettrone di tale energia nel piombo perde energia principalmente per irraggiamento. L'energia restante dopo che l'elettrone ha percorso un tratto x nella lastra è'

$$E_F = E_I e^{-x/X_0} = 103 \text{ MeV}$$

A questa energia è ancora valida l'approssimazione $E \sim cp$, pertanto in uscita dalla lastra un elettrone avrebbe impulso $cp_F = 103.0 \text{ MeV}$.

Nel caso del muone l'approssimazione $E \sim cp$ non è valida. Un muone di impulso $301.5 \text{ MeV}/c$ ha $E = 319.3 \text{ MeV}$, $\beta\gamma=2.9$ e $\beta=0.94$. La perdita di energia avviene per ionizzazione. Trascurando le correzioni di densità e applicando la formula di Bethe-Bloch

$$-dE/dx = C\rho(Z/A)(z^2/\beta^2)[\ln(2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2/I) - \beta^2] \quad (30)$$

si ricava $dE/dx = 12.9 \text{ MeV}/\text{cm}$. L'energia persa dal muone percorrendo un tratto x nella lastra è quindi $\Delta E = x * dE/dx = 7.8 \text{ MeV}$. All'uscita della lastra il muone avrà energia $E_F = 311.5 \text{ MeV}$ e quindi impulso $cp_F=293.3 \text{ MeV}$.

Una particella che nella camera di Wilson descritta percorre una circonferenza con raggio $r_2 = 65 \text{ cm}$ ha impulso pari a

$$pc = 0.3Br_2 = 292.5 \text{ MeV}$$

Si tratta pertanto di un muone.

L'angolo medio di diffusione coulombiana multipla nel piano verticale è dato da

$$\langle \theta \rangle = (1/\sqrt{2}) * 21 \text{ MeV} * \frac{z}{\beta cp} \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

pari a 0.054 rad .

4 Interazioni

4.1 Panoramica

4.1.1 Simmetrie e leggi di conservazione

La probabilità di un processo $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ è in generale proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza del processo,

$$\mathcal{P} \propto |\langle i|M_{if}|f\rangle|^2,$$

dove M_{if} è l'elemento di matrice che descrive il processo. Nel calcolo di questo elemento di matrice entrano le costanti di accoppiamento dell'interazione in gioco,²⁵ e i dettagli dell'interazione stessa, ovvero la forma della lagrangiana che descrive il processo in esame.²⁶ Da questa relazione seguono due osservazioni fondamentali, che possiamo già discutere senza gli strumenti matematici della meccanica quantistica relativistica.

²⁵Vedrete nei prossimi anni che queste costanti di accoppiamento sono in realtà funzione dell'energia a cui il processo avviene (in un certo senso, \sqrt{s}).

²⁶Si noti come in generale M_{if} può dipendere dall'energia delle particelle dello stato iniziale: in una reazione del tipo

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p,$$

ci aspettiamo un numero di eventi (e quindi una probabilità che la reazione accada) ben più alto quando \sqrt{s} è prossima alla massa della risonanza Δ^{++} , che quando \sqrt{s} assume un valore qualunque.

La prima riguarda le leggi di conservazione. Le simmetrie rispettate dalla lagrangiana che descrive l'interazione fra stato iniziale e stato finale corrispondono, attraverso il teorema di Noether, a leggi di conservazione. Ad esempio, la carica elettrica è in questo senso una grandezza conservata, che discende dall'invarianza della lagrangiana sotto trasformazioni di gauge. Un altro esempio è l'isospin: se consideriamo l'autovalore di \mathbf{I}^2 , I , sappiamo che un processo può avvenire per interazione forte solo se $\Delta I \equiv I_{|f\rangle} - I_{|i\rangle} = 0$, mentre le interazioni elettromagnetica e debole possono avvenire *anche* quando $\Delta I \neq 0$. Questo non significa ovviamente che sia *necessario* che $\Delta I \neq 0$ in una interazione elettromagnetica o debole.²⁷

La seconda osservazione fondamentale è in merito alla *probabilità* che un processo accada. L'interazione forte ha in generale una costante di accoppiamento α_s più alta della costante di accoppiamento elettromagnetica α (*costante di struttura fine*), che a sua volta è più alta della costante di accoppiamento debole.²⁸ Consideriamo quindi il caso di due adroni A e B che interagiscono fra loro, tramite un processo

$$A + B \rightarrow C + D + \dots$$

Se A e B possono interagire tra loro, sarà molto più probabile che questa interazione accada a causa della forza forte – conseguentemente, tutte le reazioni in cui si ha la violazione della conservazione dell'isospin, o della sua terza componente, o della stranezza, saranno in generale *molto poco probabili*. Analogamente, se un adrone può decadere²⁹ in un processo forte attraverso un canale di decadimento

$$A \rightarrow B + C + \dots,$$

allora tenderà a farlo – ovvero, il branching ratio di questo canale sarà più alto rispetto a quello di un altro canale di decadimento permesso solo tramite interazione debole.

4.1.2 Interazioni fondamentali e leggi di conservazione

Ciascun processo deve, fra stato iniziale e stato finale:

- conservare l'energia-impulso (nel caso dei decadimenti, quindi, la massa della particella che decade dev'essere maggiore della somma delle masse delle particelle prodotte);³⁰
- conservare la carica totale;
- conservare il numero barionico totale;
- conservare ciascuno dei tre numeri leptonici totali.

Dato un processo generico, che sia un decadimento ($A \rightarrow B + C + \dots$) o una reazione ($A + B \rightarrow C + D + \dots$):

- perché avvenga tramite interazione forte, non devono essere presenti leptoni carichi o neutrini e I , I_3 e la stranezza devono conservarsi;
- perché avvenga tramite interazione elettromagnetica, non devono essere presenti neutrini e I_3 e la stranezza devono conservarsi;
- perché avvenga tramite interazione debole, la variazione di stranezza fra stato iniziale e stato finale dev'essere $\Delta S = -1, 0$ o 1 .³¹

Inoltre – anche se non vengono trattate esplicitamente negli esercizi – parità (P), coniugazione di carica (C) e la loro combinazione (CP) sono conservate dalle interazioni forte ed elettromagnetica, ma possono essere violate in processi che avvengono per interazione debole.

4.1.3 Isospin

L'interazione forte "vede" allo stesso modo – ad esempio – protone e neutrone, particelle di massa molto simile. Possiamo quindi considerare protone e neutrone come due diversi stati di un'unica particella fittizia, il *nucleone*. Vogliamo assegnare un numero quantico al nucleone, in maniera del tutto simile al caso dello spin, che chiameremo *isospin*.³² Se \mathbf{I}^2 e \mathbf{I}_3 sono gli operatori analoghi a \mathbf{S}^2 ed \mathbf{S}_z del caso dello spin, e I e I_3 sono

²⁷Ad esempio, in $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, interazione che può avvenire sia a causa della forza elettromagnetica che di quella debole, l'isospin dello stato iniziale è uguale a quello dello stato finale, ed è zero.

²⁸Per un esempio numerico, nel caso dei decadimenti delle particelle Σ , si veda il paragrafo 5.10 delle dispense del corso.

²⁹Ça va sans dire: senza violare nessuna legge di conservazione!

³⁰Una reazione $A + B \rightarrow C + D + \dots$ in generale sarà sempre cinematicamente possibile, per un qualche valore dell'energia delle particelle dello stato iniziale (nel caso di una reazione in cui una delle particelle sia ferma, si tratta dell'usuale *energia di soglia*).

³¹I processi con $|\Delta S| > 1$ sono quantomeno molto soppressi.

³²L'interazione forte è dunque invariante sotto trasformazione di isospin.

i loro autovalori, l'isospin del nucleone è dedotto dalla richiesta che gli stati del nucleone siano proprio due: il numero di stati possibili è infatti $2I + 1$, per cui

$$2I + 1 = 2 \rightarrow I = \frac{1}{2}.$$

Protone e neutrone faranno dunque parte di un *doppietto* di isospin,

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2} \\ I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, i tre pioni π^+ , π^0 , π^- , che sono particelle di massa simile e che interagiscono forte, si possono trattare come tre stati di un tripletto di isospin,

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I = 1, I_3 = +1 \\ I = 1, I_3 = 0 \\ I = 1, I_3 = -1 \end{pmatrix}.$$

Lo scontro di fasci di pioni su bersagli di nucleoni ha mostrato l'esistenza di *risonanze*, particelle a breve vita media in corrispondenza delle quali la sezione d'urto di processi del tipo

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

subisce un aumento repentino quando l'energia nel centro di massa eguaglia la massa della risonanza, $\sqrt{s} = m_\Delta$. Esistono quattro risonanze con massa e proprietà simili fra loro, le Δ (Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^- , con masse attorno a 1232 MeV). Come nel caso del nucleone, riconosciamo che per avere quattro stati il valore di I dev'essere $\frac{3}{2}$, per cui scriviamo le Δ come

$$\begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I = \frac{3}{2}, I_3 = +\frac{3}{2} \\ I = \frac{3}{2}, I_3 = +\frac{1}{2} \\ I = \frac{3}{2}, I_3 = -\frac{1}{2} \\ I = \frac{3}{2}, I_3 = -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Esistono anche risonanze di massa più alta, come le Σ (tre risonanze con masse attorno a 1384 MeV),

$$\begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I = 1, I_3 = +1 \\ I = 1, I_3 = 0 \\ I = 1, I_3 = -1 \end{pmatrix}.$$

Mnemonicamente, si noti come le particelle di carica più alta hanno il valore di I_3 più alto, e giù a scalare.

4.2 Esercizi di riepilogo

Esercizio 31 Secondo esonero 2012/2013, es. 2

Lo $\Xi^-(1820)$ è un iperone instabile di massa $M = 1820 \text{ MeV}/c^2$ e larghezza totale $\Gamma = 20 \text{ MeV}$. Decade con branching ratio di circa il 45% nel canale $\Xi^-(1820) \rightarrow \Lambda K^-$, 43% nel canale $\Xi^-(1820) \rightarrow \Sigma^0 K^-$ e nel resto dei casi decade in $\Xi^-(1820) \rightarrow \Xi^0(1320)\pi^-$. Viene prodotto nella reazione $K^- + p \rightarrow \Xi^-(1820) + K^+ + \pi^0$, ma non dalla reazione $K^- + p \rightarrow \Xi^-(1820) + K^- + \pi^+ + \pi^+$.

1. Quale è la stranezza della $\Xi^-(1820)$?
2. Quale è la larghezza del decadimento in $\Xi^-(1820) \rightarrow \Xi^0(1320)\pi^-$?
3. Il modo di decadimento $\Xi^-(1820) \rightarrow \Lambda K^-$ è forte o debole ? Spiegare perché.

Soluzione dell'esercizio 31

Dalla prima reazione, e dal fatto che esiste solo una particella di stranezza -3 (la Ω^{-33}) si ricava che la stranezza può essere solo -1 o -2 . La seconda non avviene per stranezza -2 , per cui è questo il valore di stranezza della $\Xi^-(1820)$.

La larghezza parziale del decadimento vale

$$\Gamma_i = \Gamma(1 - 45\% - 43\%) \approx 2.4 \text{ MeV}.$$

Il decadimento $\Xi^-(1820) \rightarrow \Lambda + K^-$ è un decadimento forte, visto che tutti i numeri quantici sono conservati e che la vita media della $\Xi^-(1820)$ è dell'ordine di grandezza dei decadimenti dovuti all'interazione forte,

$$\tau = \frac{\hbar c}{\Gamma} = 3.28 \times 10^{-23} \text{ s}.$$

³³In quanto composta da tre quark strange s , di stranezza -1 ciascuno - vedi ad esempio https://en.wikipedia.org/wiki/Omega_baryon.

Esercizio 32 Appunti 2020, es. 13

Stabilire quali delle reazioni e dei decadimenti sotto indicati sono permessi e quali sono proibiti, dicendo il perché:

- $\gamma + e^- \rightarrow \mu^+ + \gamma$: vietata, viola carica elettrica, numeri leptonici elettronico e muonico;
- $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + \bar{K}^0$: vietata, viola la carica elettrica e ha $\Delta S = 2$;
- $p + n \rightarrow \Sigma^+ + K^0 + \pi^0$: vietata, viola il numero barionico;
- $K^+ + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$: vietata, viola la carica elettrica e ha $\Delta S = 2$;
- $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^-$: possibile per interazione debole;
- $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$: possibile per interazione elettromagnetica;
- $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$: possibile per interazione elettromagnetica;
- $\mu^- \rightarrow \pi^- + \nu_\mu$: vietato, non conserva il quadrimpulso;
- $\bar{K}^0 \rightarrow e^- + \nu_e$: vietato, viola la carica elettrica;
- $\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+ + \pi^+ + \pi^0$: vietato, viola la carica elettrica e non conserva il quadrimpulso;
- $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$: possibile per interazione debole;
- $\pi^- \rightarrow e^- + \nu_e$: vietato, viola il numero leptonico elettronico;
- $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$: permesso per interazione debole.

Esercizio 33 Appunti 2020, es. 14

Si considerino i seguenti decadimenti della risonanza Σ^{*0} :

$$\begin{aligned}\Sigma^{*0} &\rightarrow \Sigma^+ + \pi^-, \\ \Sigma^{*0} &\rightarrow \Sigma^0 + \pi^0, \\ \Sigma^{*0} &\rightarrow \Sigma^- + \pi^+.\end{aligned}$$

Qual è la probabilità relativa fra i tre processi?

Soluzione dell'esercizio 33

La Σ^{*0} è uno stato di isospin definito,

$$|\Sigma^{*0}\rangle = |I, I_3\rangle = |1, 0\rangle.$$

L'interazione forte conserva I e I_3 totale, fra stato iniziale e stato finale, per cui anche lo stato finale dovrà avere $I = 1$ e $I_3 = 0$. Per conoscere questi valori dell'isospin totale (e della sua terza componente), in un generico stato con due particelle a e b , è necessario esprimere il prodotto tensoriale

$$|a\rangle |b\rangle = \left| i^{(a)}, i_3^{(a)} \right\rangle \left| i^{(b)}, i_3^{(b)} \right\rangle$$

dove con la minuscola abbiamo indicato gli autovalori di I e I_3 per le singole particelle, nella base degli autostati dell'isospin totale (e della sua terza componente), che ha elementi

$$\left| I, I_3, i^{(a)}, i^{(b)} \right\rangle.$$

Per farlo, usiamo i coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned}|\Sigma^+\rangle |\pi^-\rangle &= |1, 1\rangle |1, -1\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} |2, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0\rangle, \\ |\Sigma^0\rangle |\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle |1, 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0\rangle, \\ |\Sigma^-\rangle |\pi^+\rangle &= |1, -1\rangle |1, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}} |2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}} |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |0, 0\rangle.\end{aligned}$$

La probabilità di transizione da stato iniziale a stato finale è data da

$$\mathcal{P}_{|i\rangle\rightarrow|f\rangle} \propto \sigma_{|i\rangle\rightarrow|f\rangle} \propto |\langle i|M_1|f\rangle|^2,$$

dove $\sigma_{|i\rangle\rightarrow|f\rangle}$ è la sezione d'urto del processo, che dipende da M_1 , l'elemento di matrice dell'interazione forte per isospin totale $I = 1$.³⁴ Non abbiamo (ancora) gli strumenti per calcolare M_1 , e quindi la probabilità di transizione³⁵, ma possiamo calcolare la probabilità relativa dei tre processi. Infatti, gli autostati lungo i quali abbiamo scomposto lo stato finale sono tra loro ortogonali: svolgendo i prodotti scalari fra stato iniziale e stato finale, possiamo quindi dedurre che – chiamando a , b e c i tre decadimenti in esame,

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 1 : 0 : 1,$$

ovvero che il secondo decadimento non può avvenire per interazione forte, mentre il primo e il terzo sono in buona approssimazione equiprobabili.

Esercizio 34 Appunti 2020, es. 15

Si fa collidere un fascio di pioni con un bersaglio fisso di protoni, ad una energia nel centro di massa $\sqrt{s} = 1232$ MeV. Qual è la probabilità relativa dei processi

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p, \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n, \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p? \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 34

Poiché l'energia nel centro di massa è uguale a quella delle risonanze Δ , i processi più probabili saranno

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ + p, \\ \pi^- + p &\rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n, \\ \pi^- + p &\rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- + p, \end{aligned}$$

per cui stato iniziale e finale devono avere – se questi processi avvengono tramite l'interazione forte – gli stessi valori di I e I_3 totale della risonanza prodotta.

Scomponendo stato iniziale e finale, ovvero i due prodotti tensoriali pione–nucleone, in termini di autostati dell'isospin totale (e della sua terza componente), abbiamo:

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle |p\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \\ |\pi^-\rangle |p\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\pi^0\rangle |n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \end{aligned}$$

da cui segue che – indicando con a, b, c i tre processi – le loro sezioni d'urto stanno fra loro secondo i rapporti

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = 9 : 2 : 1.$$

5 Tavola delle particelle

³⁴Stiamo usando quindi la simmetria di isospin dell'interazione forte.

³⁵In altri termini, il branching ratio dei tre canali.

Part.	M [MeV/c ²]	I	I_3	$J^{P(C)}$	B	S	τ [s]
π^+	139.6	1	1	0^-	0	0	$2.6 \cdot 10^{-8}$
π^-	139.6	1	-1	0^-	0	0	$2.6 \cdot 10^{-8}$
π^0	135.0	1	0	0^{-+}	0	0	8.4×10^{-17}
K^+	493.7	1/2	1/2	0^-	0	1	$1.2 \cdot 10^{-8}$
K^-	493.7	1/2	-1/2	0^-	0	-1	$1.2 \cdot 10^{-8}$
K^0	497.6	1/2	-1/2	0^-	0	1	non definita
\bar{K}^0	497.6	1/2	1/2	0^-	0	-1	non definita
p	938.272	1/2	1/2	$1/2^+$	1	0	stabile
n	939.565	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	0	8.79×10^2
ϕ^0	1019.5	0	0	1^{--}	0	0	1.54×10^{-22}
ρ^0	770	1	0	1^{--}	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^+	770	1	1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
ρ^-	770	1	-1	1^-	0	0	4.5×10^{-24}
f_2^0	1275.5	0	0	2^{++}	0	0	6.76×10^{-21}
$d(pn)$	1875.6	0	0	1^+	2	0	stabile
$\alpha({}_2^4He)$	3727.4	0	0	0^+	4	0	stabile
Λ^0	1115.7	0	0	$1/2^+$	1	-1	2.63×10^{-10}
Σ^+	1189.4	1	1	$1/2^+$	1	-1	8.01×10^{-11}
Σ^0	1192.6	1	0	$1/2^+$	1	-1	7.4×10^{-20}
Σ^-	1197.3	1	-1	$1/2^+$	1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	1/2	1/2	$1/2^+$	1	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.7	1/2	-1/2	$1/2^+$	1	-2	1.64×10^{-10}
Ξ^{0*}	1531.8	1/2	1/2	$3/2^+$	1	-2	7.23×10^{-23}

Tabella 1: Isospin (I), spin (J), parità (P), coniugazione di carica (C), stranezza (S), numero barionico (B) e vita media τ di diverse particelle.