Esercizi per casa

Valerio Ippolito*

18 aprile 2024

1 Settimana 1 (15 marzo 2024)

Esercizio 1 Dilatazione dei tempi

Qual è la velocità con la quale viaggia un orologio se il suo *rate* è pari alla metà del rate di un orologio a riposo?

Esercizio 2 Contrazione delle lunghezze

Un osservatore misura la lunghezza di un'asta quando questa è a riposo, ottenendo $L = 1\,\mathrm{m}$, e quando è in moto, ottenendo $L' = 0.5\,\mathrm{m}$. A che velocità viaggia l'asta quando è in moto?

Esercizio 3 Limite di piccole velocità

Un orologio atomico è posto su un Boeing 747. L'orologio misura l'intervallo di tempo che separa due eventi, ottenendo $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ quando si muove con velocità $v = 1000\,\mathrm{km/h}$ rispetto ad un osservatore a terra. Qual è l'intervallo di tempo misurato da un orologio identico ma a riposo rispetto all'osservatore?

Esercizio 4 Contrazione delle lunghezze

Un'asta di lunghezza L_0 si muove con velocità v lungo la direzione orizzontale. Nel sistema di riferimento dell'asta, questa forma un angolo θ rispetto all'asse x'. Determinare la lunghezza dell'asta misurata da un osservatore in quiete e l'angolo che l'asta forma con l'asse x.

Esercizio 5 Trasformazione delle velocità

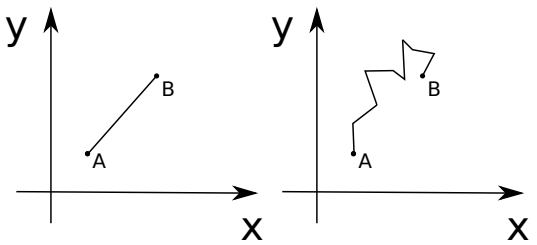
Un osservatore, in quiete sulla Terra, vede due astronavi avvicinarsi l'una all'altra lungo la stessa direzione, alla stessa velocità. La loro velocità relativa è $0.7c$. Determinare la velocità delle due astronavi misurata dall'osservatore a Terra.

Esercizio 6 Leggi di trasformazione

In relatività speciale, come si trasforma il volume? E la densità?

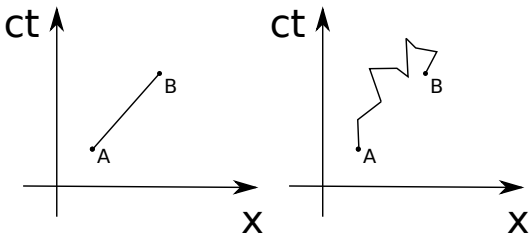
Esercizio 7 Intervallo invariante

Si considerino anzitutto due punti A e B nello spazio euclideo (rappresentato per semplicità in due dimensioni). Quale dei due cammini in figura è più breve?



Si consideri ora lo spazio di Minkowski (pseudo-euclideo), con l'usuale definizione di distanza $\mathrm{d}s^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Quale dei due tragitti è più breve? Si assuma che tutti i segmenti di curva che congiungono A e B siano di tipo tempo.

*valerio.ippolito@roma1.infn.it



Esercizio 8 Quadrivelocità

Qual è la quadrivelocità di una particella che si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, con velocità $v = \frac{3}{5}c$?

Esercizio 9 Decadimento e dilatazione dei tempi

Metà dei muoni di un fascio composto da muoni di energia fissata sopravvive dopo aver viaggiato $l = 600\,\mathrm{m}$ nel sistema di riferimento del laboratorio. Qual è la velocità dei muoni?

Esercizio 10 Calcolo tensoriale

Un tensore, le cui componenti contravarianti si indicano come $a^{\mu\nu}$, è la generalizzazione a due indici di un quadrivettore. Mentre un quadrivettore ha 4 componenti, un tensore a due indici ne ha $4 \times 4 = 16$. Se, nel passaggio da un sistema di riferimento O in quiete a uno O' in moto lungo l'asse x con velocità $V = \beta c$, le coordinate di un quadrivettore trasformano secondo la legge

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu},$$

dove le Λ^{μ}_{ν} sono le componenti della matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

analogamente un tensore trasforma secondo

$$a'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} a^{\rho\sigma}.$$

Analogamente a quanto accade per i quadrivettori, le coordinate contravarianti di un tensore sono legate a quelle covarianti dalla relazione

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} a^{\rho\sigma}.$$

Un tensore si dice *simmetrico* se le sue componenti sono uguali sotto scambio degli indici ($a^{\mu\nu} = a^{\nu\mu}$), e *antisimmetrico* se sono uguali ma di segno opposto ($a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}$).

1. Quanti elementi indipendenti ci sono in un tensore simmetrico? (si considerano dipendenti ad esempio a^{12} e $a^{21} = a^{12}$)
2. E in un tensore antisimmetrico?
3. Simmetria e antisimmetria sono caratteristiche che si mantengono sotto trasformazione di Lorentz?
4. Se un tensore $a_{\mu\nu}$ è simmetrico, lo è anche la sua versione covariante $a_{\mu\nu}$? E se è antisimmetrico?
5. Se $a^{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico e $b^{\mu\nu}$ un tensore antisimmetrico, quanto vale $a_{\mu\nu} b^{\mu\nu}$?
6. Scomporre un tensore generico $a^{\mu\nu}$ nella somma di due tensori, uno simmetrico e l'altro antisimmetrico.

Esercizio 11 Relazione fra forza e accelerazione

In relatività speciale, forza e accelerazione sono in generale proporzionali fra loro? Usare la definizione di forza $F = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$.

Suggerimento: scomporre l'accelerazione nella somma di un termine parallelo e un termine ortogonale alla direzione del moto (cioè alla velocità).

Esercizio 12 Classificazione dei quadrivettori

Il quadrimpulso è un quadrivettore di tipo spazio, tempo o luce?

Esercizio 13 Energia cinetica

Quanto lavoro bisogna compiere per aumentare la velocità di un elettrone ($m = 511\,\mathrm{keV/c^2}$) dalla posizione di riposo a:

1. $0.50c$?
2. $0.990c$?
3. $0.9990c$?

Esercizio 14 Energia di soglia

Supponiamo di far scontrare un fascio di protoni con un protone a riposo. Qual è l'energia minima che devono avere i protoni del fascio perché la reazione

$$p + p \to p + p + p + \bar{p}$$

sia permessa? (La massa del protone è pari a quella dell'antiprotone $\bar{p}$, e vale $938\,\mathrm{MeV/c^2}$.)

Esercizio 15 Diffusione elastica

Chiamiamo elastico un urto ("scattering") in cui le particelle dello stato iniziale e dello stato finale sono le stesse. Si consideri un urto elastico fra una particella di massa nulla e una particella di massa m (*bersaglio*) che si trova a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio: qual è la massima energia trasferita dalla particella incidente al bersaglio? *Suggerimento: si lavori nel sistema di riferimento del laboratorio, e si espliciti il prodotto scalare fra gli impulsi spaziali della particella di massa nulla prima e dopo l'urto in funzione dell'angolo, sempre nel sistema di riferimento del laboratorio, fra la direzione iniziale e finale della particella incidente.*

Se la particella incidente è un fotone e il bersaglio è un elettrone atomico a riposo, di quanto varia la lunghezza d'onda del fotone fra prima e dopo l'urto?

2 Settimana 2 (21 marzo 2024)

Esercizio 16 Trasformazione delle velocità

Un oggetto si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante αc verso un secondo oggetto immobile. A che velocità dobbiamo muoverci noi, lungo la stessa direzione, per vedere entrambi gli oggetti muoversi con velocità uguali e opposte?

Esercizio 17 Conseguenze della relatività

Una navicella spaziale, in moto rettilineo uniforme con velocità $0.5c$ in allontanamento dalla Terra, è in orbita verso Plutone, che si trova a $7.5 \times 10^9\,\mathrm{km}$ di distanza dalla Terra. Non appena raggiunto il pianeta, la comandante invia un segnale radio alla base, a Houston, per chiedere l'autorizzazione all'atterraggio. Quanto tempo impiega la richiesta a raggiungere la base, secondo la comandante? E secondo i suoi colleghi a Houston?

Esercizio 18 Energia cinetica

Ha più energia un protone che viaggia a $0.9999999896c$ o un Boeing 747 al decollo?

Esercizio 19 Dilatazione dei tempi

Una scienziata misura che un fascio di particelle, selezionate con impulso di $10\,\mathrm{GeV/c}$, si degrada dell'84% dopo aver percorso $1\,\mathrm{m}$. Se la massa di queste particelle è $498\,\mathrm{MeV/c^2}$, qual è la loro vita media?

Esercizio 20 Dilatazione dei tempi

Vi trovate a dover studiare un fascio di particelle di cui conoscete l'energia – $2\,\mathrm{GeV}$ – ma non la massa: a quanto ne sapete, potrebbero essere composti da elettroni (di massa $511\,\mathrm{keV/c^2}$) o protoni ($938\,\mathrm{MeV/c^2}$). Avete a disposizione due rivelatori identici, in grado di registrare con precisione il tempo in cui una particella li attraversa. Come potete utilizzarli per determinare se il vostro fascio contiene elettroni o protoni?

Esercizio 21 Energia di soglia

Due fisici delle particelle vogliono produrre il bosone Z, una particella di carica neutra e di massa $m_Z = 91\,\mathrm{GeV/c^2}$, e discutono come fare. Alice propone di far scontrare fasci di elettroni e positroni di energia identica, che viaggiano dunque con impulso spaziale uguale in modulo e direzione ma di verso opposto, producendo Z tramite il processo

$$e^+ + e^- \to Z,$$

mentre Bob preferisce scontrare un fascio di protoni su un bersaglio fisso di idrogeno, tramite il processo

$$p + p \to Z + p + p.$$

Chi dei due avrà bisogno di fasci di particelle di energia più alta? La massa del protone è di $938.3\,\mathrm{MeV/c^2}$, quella dell'elettrone di $511\,\mathrm{keV/c^2}$.

Esercizio 22 Leggi di conservazione

Un fotone (particella di massa nulla) può decadere in un elettrone e in un positrone (entrambi di massa $511\,\mathrm{keV/c^2}$), tramite il processo

$$\gamma \to e^+ + e^-?$$

Esercizio 23 Decadimento β^-

Quali sono l'energia minima e massima dell'elettrone nel decadimento

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

se il neutrone decade da fermo? La massa del neutrone è di $939.6\,\mathrm{MeV/c^2}$, quella del protone di $938.3\,\mathrm{MeV/c^2}$ e quella dell'elettrone di $511\,\mathrm{keV/c^2}$; si assuma che l'antineutrino elettronico $\bar{\nu}_e$ abbia massa nulla.

Esercizio 24 Leggi di conservazione

Il decadimento

$$p \to n + e^+ + \nu_e$$

è permesso?

Esercizio 25 Unità naturali e sistema internazionale

Usando il fatto che $\hbar c = 197.3\,\mathrm{MeVfm}$, si dimostri che in un sistema di unità di misura in cui $\hbar = c = 1$ vale:

1. $1\,\mathrm{GeV}^{-2} = 0.389\,\mathrm{mb}$
2. $1\,\mathrm{m} = 5.068 \times 10^{15}\,\mathrm{GeV}^{-1}$
3. $1\,\mathrm{s} = 1.5 \times 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}$

Ricordiamo che $1\,\mathrm{b} = 1 \times 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$ e che

$$[\hbar c] = [\mathrm{Jsm/s}] = [E][L].$$

Esercizio 26 Massa invariante

Tre protoni ($m_p = 938\,\mathrm{MeV/c^2}$) hanno impulsi uguali in modulo ($p = 3\,\mathrm{GeV/c}$) e che formano angoli di 120° l'uno con l'altro. Qual è la massa invariante del sistema?

Esercizio 27 Energia di soglia

Si consideri il processo

$$\gamma + p \to p + \pi^0,$$

dove il fotone ha massa nulla, il protone ha massa di $938\,\mathrm{MeV/c^2}$ e il π^0 ha massa di $135\,\mathrm{MeV/c^2}$.

1. Se il protone è a riposo, qual è l'energia minima che deve avere il fotone incidente perché la reazione abbia luogo?
2. La stessa reazione può avvenire nell'universo[1], in cui un protone dei raggi cosmici di alta energia può collidere con uno dei fotoni della radiazione cosmica di fondo, di energia dell'ordine di $1\,\mathrm{meV}$. Qual è in questo caso l'energia minima che deve avere il protone perché la reazione abbia luogo?

Esercizio 28 Conseguenze della relatività

Un misterioso supereroe pattuglia, a velocità molto elevata, la periferia romana. All'incrocio con via di Tor Bella Monaca incontra un semaforo e – vedendolo verde – attraversa senza rallentare. Una pattuglia della polizia municipale lo ferma e lo multa per esser passato col rosso. Assumendo sia il supereroe che i vigili siano nel giusto, a che velocità viaggiava il supereroe?

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Greisen-Zatsepin-Kuzmin_limit`

Esercizio 29 Conseguenze della relatività

I neutrini sono particelle di massa molto piccola e al momento ignota. Uno dei modi con cui è stato possibile dedurre un limite superiore al suo valore è stata l'osservazione, nel 1987, di neutrini prodotti dalla supernova 1987A[2], che si trova a 168000 anni luce dalla Terra. Sono stati osservati due segnali di neutrini, che possono essere schematizzati come segue: si è osservato prima un neutrino di 35 MeV di energia, seguito a 9 s di distanza da un secondo segnale di 13 MeV. Si assuma che questo ritardo sia dovuto al fatto che la massa del neutrino non è nulla, e si calcoli quest'ultima.

Esercizio 30 Legge di decadimento

Animali e piante assumono dall'atmosfera diversi composti contenenti carbonio. Il carbonio presente nell'atmosfera è predominantemente ${}^{12}_{6}C$, ma sono presenti piccole concentrazioni del suo isotopo ${}^{14}_{6}C$ (un atomo ogni 10^{12}), che decade con emissione di elettroni attraverso il processo[3]

$$ {}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}_e, $$

con un tempo di dimezzamento di 5700 anni.

1. Qual è la concentrazione di ${}^{14}_{6}C$ dopo 11400 anni?
2. Animali e piante assumono in vita proporzioni fisse di ${}^{14}_{6}C$ e ${}^{12}_{6}C$, mentre alla loro morte la quantità di ${}^{14}_{6}C$ inizia a diminuire. Avete a portata di mano un relitto di legno, per cui misurate una emissione di elettroni dal decadimento di ${}^{14}_{6}C$ pari al 61% di quella di un pezzo di legno "vivo" della stessa massa: quanti anni ha il manufatto?

Esercizio 31 Energia cinetica e trasformazioni di Lorentz

Due particelle identiche di massa m ed energia cinetica T collidono frontalmente. Qual è la loro energia cinetica relativa (ossia l'energia cinetica di una particella misurata nel sistema di riferimento dell'altra particella)?

Esercizio 32 Energia nel centro di massa

La reazione

$$ \pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0 $$

avviene con un'energia nel centro di massa di $\sqrt{s} = 3\,\mathrm{GeV}$. La massa del π^- è di $139.6\,\mathrm{MeV/c^2}$, la massa del protone è di $938\,\mathrm{MeV/c^2}$, la massa del K^- è di $498\,\mathrm{MeV/c^2}$ e quella della Λ^0 di $1.1\,\mathrm{GeV/c^2}$

1. Calcolare l'impulso di π^- e Λ^0 nel sistema di riferimento del centro di massa.
2. Se il protone è a riposo, il K può essere emesso all'indietro nel sistema di riferimento del laboratorio?

Esercizio 33 Decadimento

Il mesone ϕ^0 è una particella neutra[4] di circa $1\,\mathrm{GeV/c^2}$ di massa, che può decadere in una coppia di particelle,

$$ \phi^0 \rightarrow K^+ + K^-, $$

di massa identica $m_K = 494\,\mathrm{MeV/c^2}$. Si assuma di produrre ϕ^0 di impulso noto: è possibile che uno dei due K sia prodotto a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio?

Esercizio 34 Decadimento

Un fascio di anti-neutrini muonici, $\bar{\nu}_\mu$, si può generare selezionando pioni o kaoni, π^+ e K^+, e facendoli passare in un lungo tubo in cui è stato fatto il vuoto[5], in modo che dopo un certo tragitto L una buona parte di loro sarà decaduta tramite i processi

$$ \pi^+ \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, $$
$$ K^+ \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu. $$

Se l'impulso di pioni e kaoni è di $200\,\mathrm{GeV/c}$, e la loro vita media di 26 ns e 12 ns, rispettivamente:

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/SN_1987A`

[3] Di altro non si tratta che del decadimento β^-, $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$.

[4] Il collisore DAFNE ai Laboratori Nazionali di Frascati produce specificatamente particelle di questo tipo, tramite il processo $e^+ + e^- \rightarrow \phi^0$: `https://www.youtube.com/watch?v=L5yB9gDGKms`.

[5] Una tecnica di questo tipo è stata usata per inviare ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso dei fasci di neutrini prodotti al CERN di Ginevra: `https://videos.cern.ch/record/985892`.

1. Quanto a lungo viaggiano nel laboratorio i due tipi di particelle?
2. Se $L = 1000\,\mathrm{m}$, quale sarà la frazione di pioni e kaoni che sarà decaduta alla fine del tubo?
3. Qual è l'energia massima dei neutrini che è possibile misurare nel sistema di riferimento del laboratorio, nei due casi?

3 Settimana 5 (18 aprile 2024)

Esercizio 35 Energia cinetica

Tra le eccellenze con sede in territorio elvetico primeggiano indiscutibilmente la cioccolata al latte e il Large Hadron Collider (LHC). Quest'ultimo è un collisore di particelle, situato al CERN di Ginevra, che fa scontrare due fasci identici di protoni, di impulso uguale in modulo e direzione ma verso opposto. I fasci sono composti da circa 2800 gruppi ("pacchetti") di 10^{11} particelle ciascuno. Sapendo che l'energia nel centro di massa della collisione fra due protoni è $\sqrt{s} = 13\,\mathrm{TeV}$, quanta cioccolata al latte dovete mangiare per assumere un numero di calorie pari all'energia cinetica di ciascun fascio di protoni di LHC?

Esercizio 36 Scattering Rutherford

Un fascio di particelle α di $100\,\mathrm{MeV}$ di energia e $0.32\,\mathrm{nA}$ di corrente[6] collide contro un bersaglio fisso di alluminio, spesso $1\,\mathrm{cm}$. Una sperimentatrice prende un rivelatore di $1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ di superficie, e lo posiziona ad un angolo di 30° rispetto al fascio di particelle, a $1\,\mathrm{m}$ di distanza dal bersaglio. Quante particelle α incideranno sul rivelatore ogni secondo?

Esercizio 37 Sezione d'urto

Un bersaglio di idrogeno liquido, di densità $\rho = 0.071\,\mathrm{g/cm^3}$ e volume $V = 125\,\mathrm{cm^3}$, è bombardato da un fascio monoenergetico di pioni negativi con un flusso $\phi = 2 \times 10^7\,\mathrm{m^{-2}}s^{-1}$ e si osserva la reazione

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n,$$

rivelando i fotoni del decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$, che avviene nel 98.8% dei casi. Se la sezione d'urto di quell'interazione è $\sigma = 40\,\mathrm{mb}$, quanti fotoni sono emessi ogni secondo?

Esercizio 38 Sezione d'urto

La sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico per raggi X di $10\,\mathrm{keV}$ in carbonio è $40\,\mathrm{b}$ per atomo. Data una lastra di carbonio di $4\,\mathrm{mm}$ di spessore, si calcoli:

1. il numero di bersagli per unità di volume;
2. il coefficiente di assorbimento per effetto fotoelettrico dei raggi X di tale energia;
3. la probabilità che un raggio X incidente sulla lastra produca un elettrone per effetto fotoelettrico.

Esercizio 39 Sezioni d'urto

Un bersaglio d'oro di densità superficiale $\rho_S = 0.97\,\mathrm{mg/cm^2}$ e superficie $S_B = 1\,\mathrm{cm^2}$ viene colpito da un fascio di particelle α, la cui sezione trasversa è contenuta completamente nell'area del bersaglio. Sul bersaglio impattano $3.7 \times 10^4\,\alpha/\mathrm{s}$. La sezione d'urto di diffusione elastica ad un certo angolo θ vale $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = 1\,\mathrm{b/sr}$. Calcolare:

1. la densità di atomi del bersaglio per unità di superficie;
2. il numero di particelle α rivelate in un'ora da un rivelatore di superficie $S_R = 2\,\mathrm{cm^2}$ posto all'angolo θ e a distanza $D_R = 0.1\,\mathrm{m}$ dal bersaglio;
3. Se il fascio di particelle viene sostituito da una sorgente radioattiva di particelle α con distribuzione isotropa su tutto l'angolo solido, che viene posta lungo la stessa linea del fascio a distanza $D_B = 20\,\mathrm{cm}$ dal bersaglio, quanto tempo è necessario per rivelare con lo stesso rivelatore lo stesso numero di particelle calcolato sopra, a parità di sezione d'urto?

Esercizio 40 Cinematica

[6] Per una spiegazione breve su come (e perché) si misura la corrente di un fascio di particelle, vedi `https://www.lhc-closer.es/taking_a_closer_look_at_lhc/0.beam_current`. Una trattazione più completa è data ad esempio da `https://cds.cern.ch/record/1213275/files/p141.pdf`.

Un fascio di positroni di 100 MeV di energia annichila su un bersaglio fisso di elettroni, producendo due fotoni tramite il processo

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma.$$

Se uno dei due fotoni è emesso a 30° nel sistema del centro di massa:

1. quanto vale l'energia dei due fotoni nel sistema del centro di massa?
2. che energia e direzione avranno nel sistema del laboratorio?

Esercizio 41 Sezione d'urto

Gli antineutrini $\bar{\nu}_e$ prodotti da un reattore nucleare con potenza $P = 1.6\,\mathrm{GW}$ attraversano un bersaglio da 2000 l d'acqua, posto a 50 m di distanza dal reattore.

1. Supponendo che per ogni fissione sia prodotta un'energia termica di 200 MeV e vengano emessi 6 antineutrini, calcolare il numero medio di reazioni

$$\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n$$

   prodotte al giorno, se la sezione d'urto è $\sigma = 1 \times 10^{-43}\,\mathrm{cm}^2$.
2. Qual è la minima energia del neutrino per cui la reazione è permessa?