Esercizi per casa (risolti)

Valerio Ippolito*

18 aprile 2024

1 Settimana 1 (15 marzo 2024)

Esercizio 1 Dilatazione dei tempi

Qual è la velocità con la quale viaggia un orologio se il suo *rate* è pari alla metà del rate di un orologio a riposo?

Soluzione dell'esercizio 1

Per *rate* intendiamo che lunghezza di un intervallo di tempo: in altri termini, stiamo guardando un orologio in movimento e lo vediamo scorrere due volte più lentamente di quanto vede chi lo indossa. Poiché la dilatazione dei tempi dipende da γ, questo significa semplicemente che

$$\Delta t = 2\Delta t' = \gamma \Delta t' \longrightarrow \gamma = 2,$$

e dalla definizione di γ segue naturalmente che

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2 \\
\frac{1}{2} &= \sqrt{1-\beta^2} \\
\beta^2 &= \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \\
v &= \frac{\sqrt{3}}{4} c = 2.6 \times 10^8\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Contrazione delle lunghezze

Un osservatore misura la lunghezza di un'asta quando questa è a riposo, ottenendo $L = 1\,\mathrm{m}$, e quando è in moto, ottenendo $L' = 0.5\,\mathrm{m}$. A che velocità viaggia l'asta quando è in moto?

Soluzione dell'esercizio 2

La lunghezza a riposo è legata alla lunghezza misurata quando l'asta è in movimento dalla relazione $L' = L/\gamma$, per cui $\gamma = 2$. La velocità dell'asta è dunque

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2 \\
\frac{1}{2} &= \sqrt{1-\beta^2} \\
\beta^2 &= \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \\
v &= \frac{\sqrt{3}}{4} c = 2.6 \times 10^8\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Limite di piccole velocità

Un orologio atomico è posto su un Boeing 747. L'orologio misura l'intervallo di tempo che separa due eventi, ottenendo $\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ quando si muove con velocità $v = 1000\,\mathrm{km/h}$ rispetto ad un osservatore a terra. Qual è l'intervallo di tempo misurato da un orologio identico ma a riposo rispetto all'osservatore?

*valerio.ippolito@roma1.infn.it

Soluzione dell'esercizio 3

La velocità è $v = 1000\,\mathrm{km/h} \ll c$, per cui possiamo lavorare nel limite di piccole velocità e semplificare un po' i conti. Gli stessi eventi, misurati dall'osservatore, saranno separati da un intervallo di tempo

$$\begin{aligned}\Delta t' = \gamma \Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)\Delta t \\ &\equiv \Delta t + \delta t,\end{aligned}$$

dove $\delta t \approx 1.5\,\mathrm{ns}$.

Esercizio 4 Contrazione delle lunghezze

Un'asta di lunghezza L_0 si muove con velocità v lungo la direzione orizzontale. Nel sistema di riferimento dell'asta, questa forma un angolo θ rispetto all'asse x'. Determinare la lunghezza dell'asta misurata da un osservatore in quiete e l'angolo che l'asta forma con l'asse x.

Soluzione dell'esercizio 4

Assumiamo che i due sistemi di riferimento abbiano gli assi coincidenti, e che x (e x') siano orientati lungo la direzione del moto relativo dell'asta rispetto al laboratorio. Il punto in questo esercizio è che solo le lunghezze lungo la direzione del moto, x, subiscono l'effetto della contrazione relativistica. Dobbiamo dunque scomporre l'asta in lunghezza longitudinale e trasversale, che nel sistema di riferimento in cui l'asta è ferma valgono

$$L_\parallel = L_0 \cos\theta, L_\perp = L_0 \sin\theta,$$

applicare opportunamente la contrazione di Lorentz, nel passaggio al sistema di riferimento del laboratorio (apice $'$),

$$L'_\parallel = \frac{1}{\gamma} L_0 \cos\theta, L'_\perp = L_0 \sin\theta,$$

ottenendo quindi la lunghezza dell'asta misurata nel laboratorio,

$$\begin{aligned}L' = \sqrt{{L'_\parallel}^2 + {L'_\perp}^2} &= L_0\sqrt{\sin^2\theta + \frac{1}{\gamma^2}\cos^2\theta} \\ &= L_0\sqrt{\sin^2\theta + (1-\beta^2)\cos^2\theta} = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta},\end{aligned}$$

che è ovviamente minore di L_0, e l'angolo fra l'asta e l'asse x' (l'asse orizzontale nel sistema del laboratorio),

$$\theta' = \arctan\left(\frac{L'_\perp}{L'_\parallel}\right) = \arctan\left(\gamma\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\gamma\tan\theta\right).$$

Esercizio 5 Trasformazione delle velocità

Un osservatore, in quiete sulla Terra, vede due astronavi avvicinarsi l'una all'altra lungo la stessa direzione, alla stessa velocità. La loro velocità relativa è $0.7c$. Determinare la velocità delle due astronavi misurata dall'osservatore a Terra.

Soluzione dell'esercizio 5

Il testo intende che ciascuna delle due astronavi vede l'altra viaggiare a una velocità di $0.7c$. In altri termini,

$$v_A^{(B)} = v_B^{(A)} = 0.7c \equiv a,$$

dove il pedice indica l'astronave di cui misuriamo la velocità, e l'apice indica il sistema di riferimento in cui la velocità è misurata. Chiamiamo questa quantità a, per semplificare i conti.

L'incognita del problema è la velocità di ciascuna delle due astronavi, che è uguale in modulo per ipotesi, nel sistema di riferimento del laboratorio – ovvero,

$$v_A^{(\mathrm{lab})} = v_B^{(\mathrm{lab})} \equiv x.$$

Si noti che ovviamente

$$\mathbf{v}_A^{(\mathrm{lab})} = -\mathbf{v}_B^{(\mathrm{lab})}$$

in quanto le due astronavi si avvicinano l'una all'altra.

Esprimiamo quindi la velocità di B nel sistema di riferimento di A, che è nota, in funzione della velocità di B nel sistema di riferimento del laboratorio, che è ignota: tenendo opportunamente conto dei segni,

$$v_B^{(A)} = \frac{v_B^{(\mathrm{lab})} - v_A^{(\mathrm{lab})}}{1 - \frac{v_A^{(\mathrm{lab})}}{c}\frac{v_B^{(lab)}}{c}} = \frac{2x}{1 + \frac{x^2}{c}} = a$$

da cui

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\frac{a^2}{c^2}}}{2\frac{a}{c}} = \frac{c}{a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a}{c}\right)^2}\right) \approx 0.40c$$

dove abbiamo scartato la soluzione con $x > c$. Viste dal sistema di riferimento del laboratorio, le astronavi viaggiano quindi a $+0.40c$ e $-0.40c$.

Esercizio 6 Leggi di trasformazione

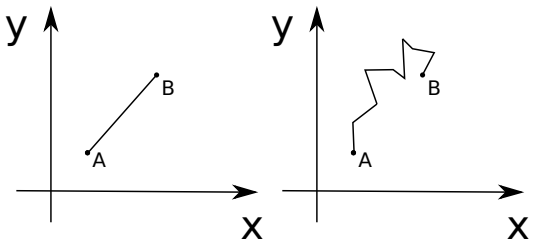
In relatività speciale, come si trasforma il volume? E la densità?

Soluzione dell'esercizio 6

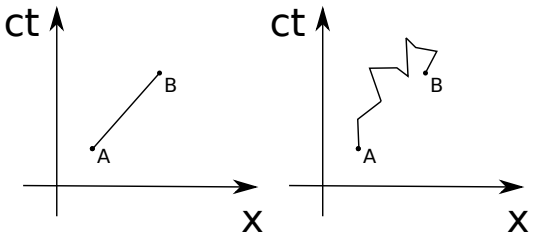
Il volume di un corpo in moto è il prodotto di tre componenti, due trasverse e una parallela al boost di Lorentz. Perciò, il volume misurato a terra è $V = V'/\gamma$. Le densità, invece, aumentano di un fattore γ.

Esercizio 7 Intervallo invariante

Si considerino anzitutto due punti A e B nello spazio euclideo (rappresentato per semplicità in due dimensioni). Quale dei due cammini in figura è più breve?



Si consideri ora lo spazio di Minkowski (pseudo-euclideo), con l'usuale definizione di distanza $\mathrm{d}s^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Quale dei due tragitti è più breve? Si assuma che tutti i segmenti di curva che congiungono A e B siano di tipo tempo.



Soluzione dell'esercizio 7

Nello spazio euclideo, la linea retta tra due punti è quella che minimizza la distanza $\mathrm{d}x$. Nello spazio di Minkowski, a causa del segno negativo alle componenti spaziali di $\mathrm{d}s^2$, la distanza $\mathrm{d}s$ è invece *massima* per il cammino in linea retta.

Esercizio 8 Quadrivelocità

Qual è la quadrivelocità di una particella che si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x, con velocità $v = \frac{3}{5}c$?

Soluzione dell'esercizio 8

La quadrivelocità di una particella è rappresentata dal quadrivettore contravariante

$$\eta^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \left(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

dove τ è il tempo proprio della particella, ovvero il tempo misurato nel suo sistema di riferimento. Il problema ci fornisce la velocità nel sistema di riferimento del laboratorio, perciò ci conviene esprimere il tempo proprio in funzione del tempo misurato nel laboratorio, $t = \gamma\tau$:

$$\eta^\mu = \left(\gamma c, \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \gamma\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \gamma(c, v, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}\left(c, \frac{3}{5}c\right) = \frac{c}{4}(5, 3, 0, 0).$$

La norma della quadrivelocità vale

$$\eta^\mu\eta_\mu = g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu = \frac{c^2}{4^2}(5^2 - 3^2 - 0 - 0) = c^2,$$

che è manifestamente invariante.

Esercizio 9 Decadimento e dilatazione dei tempi

Metà dei muoni di un fascio composto da muoni di energia fissata sopravvive dopo aver viaggiato $l = 600\,\mathrm{m}$ nel sistema di riferimento del laboratorio. Qual è la velocità dei muoni?

Soluzione dell'esercizio 9

Da

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{vt}{v\tau}\right) = \exp\left(-\frac{l}{\beta c\gamma\tau_0}\right) = \frac{1}{2}$$

segue che

$$-\log\frac{1}{2} = \frac{l}{\beta\gamma c\tau_0}$$
$$\beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{l}{\log\frac{1}{2}c\tau_0} \equiv \lambda,$$

ed elevando al quadrato

$$\beta = \sqrt{\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}} \approx 0.80.$$

Esercizio 10 Calcolo tensoriale

Un tensore, le cui componenti contravarianti si indicano come $a^{\mu\nu}$, è la generalizzazione a due indici di un quadrivettore. Mentre un quadrivettore ha 4 componenti, un tensore a due indici ne ha $4 \times 4 = 16$. Se, nel passaggio da un sistema di riferimento O in quiete a uno O' in moto lungo l'asse x con velocità $V = \beta c$, le coordinate di un quadrivettore trasformano secondo la legge

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

dove le Λ^μ_ν sono le componenti della matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

analogamente un tensore trasforma secondo

$$a'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma a^{\rho\sigma}.$$

Analogamente a quanto accade per i quadrivettori, le coordinate contravarianti di un tensore sono legate a quelle covarianti dalla relazione

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}a^{\rho\sigma}.$$

Un tensore si dice *simmetrico* se le sue componenti sono uguali sotto scambio degli indici ($a^{\mu\nu} = a^{\nu\mu}$), e *antisimmetrico* se sono uguali ma di segno opposto ($a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}$).

1. Quanti elementi indipendenti ci sono in un tensore simmetrico? (si considerano dipendenti ad esempio a^{12} e $a^{21} = a^{12}$)
2. E in un tensore antisimmetrico?
3. Simmetria e antisimmetria sono caratteristiche che si mantengono sotto trasformazione di Lorentz?

4. Se un tensore $a_{\mu\nu}$ è simmetrico, lo è anche la sua versione covariante $a_{\mu\nu}$? E se è antisimmetrico?
5. Se $a^{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico e $b^{\mu\nu}$ un tensore antisimmetrico, quanto vale $a_{\mu\nu}b^{\mu\nu}$?
6. Scomporre un tensore generico $a^{\mu\nu}$ nella somma di due tensori, uno simmetrico e l'altro antisimmetrico.

Soluzione dell'esercizio 10

1. Un tensore simmetrico ha 10 componenti indipendenti $(a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{22}, a^{23}, a^{24}, a^{33}, a^{34}, a^{44})$.
2. Un tensore antisimmetrico ha 6 componenti indipendenti $(a^{12}, a^{13}, a^{14}, a^{23}, a^{24}, a^{34})$.
3. Se un tensore è simmetrico, significa che
$$a^{\mu\nu} = a^{\nu\mu}.$$
La versione trasformata del termine a sinistra è
$$a'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}a^{\rho\sigma},$$
mentre quella del termine di destra è
$$a'^{\nu\mu} = \Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\sigma}a^{\rho\sigma},$$
ma applicando la definizione di tensore simmetrico nel riferimento di partenza (coordinate senza apici), e applicando la proprietà commutativa ai termini della matrice di Lorentz, si ha
$$a'^{\nu\mu} = \Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\sigma}a^{\rho\sigma} = \Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\sigma}a^{\sigma\rho} = \Lambda^{\mu}_{\sigma}\Lambda^{\nu}_{\rho}a^{\sigma\rho} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}a^{\rho\sigma} = a'^{\mu\nu},$$
dove abbiamo – nell'ultimo passaggio – usato il fatto che sia ρ che σ sono indici muti. Ne concludiamo che un tensore simmetrico rimane tale dopo trasformazione di Lorentz.

   Se il tensore è antisimmetrico, analogamente, significa che
$$a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}.$$
La versione trasformata del termine a sinistra è sempre
$$a'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}a^{\rho\sigma}.$$
Applicando ancora una volta la definizione di tensore antisimmetrico nel riferimento di partenza, e la proprietà commutativa, si ha
$$a'^{\nu\mu} = \Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\sigma}a^{\rho\sigma} = \Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\sigma}\left(-a^{\sigma\rho}\right) = -\Lambda^{\mu}_{\sigma}\Lambda^{\nu}_{\rho}a^{\sigma\rho} = -\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}a^{\rho\sigma} = -a'^{\mu\nu},$$
cioè anche l'antisimmetria è mantenuta dopo trasformazione di Lorentz.
4. Per il tensore simmetrico,
$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}a^{\rho\sigma} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}a^{\sigma\rho} = g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}a^{\sigma\rho} = a_{\mu\nu}.$$
Nel caso antisimmetrico,
$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}a^{\rho\sigma} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\left(-a^{\sigma\rho}\right) = -g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}a^{\sigma\rho} = -a_{\mu\nu}.$$
5. Vale
$$a_{\mu\nu}b^{\mu\nu} = a_{\nu\mu}b^{\nu\mu} = a_{\mu\nu}\left(-b^{\mu\nu}\right) = -\left(a_{\mu\nu}b_{\mu\nu}\right) \to a_{\mu\nu}b^{\mu\nu} = 0,$$
dove al primo passaggio abbiamo semplicemente rinominato gli indici muti, e al secondo abbiamo usato le proprietà di simmetria/antisimmetria dei tensori di partenza. Ne segue dunque che il prodotto fra un tensore simmetrico e uno antisimmetrico è zero.

   Suggerimento: almeno una volta nella vita, conviene esplicitare la somma implicita nella notazione di Einstein, per comprendere davvero questo formalismo così compatto.
6. Basta costruire due somme che per costruzione, allo scambio di indici, sono l'una simmetrica,
$$a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(t^{\mu\nu} + t^{\nu\mu}),$$
e l'altra antisimmetrica, cioè
$$a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(t^{\mu\nu} - t^{\nu\mu}).$$
È evidente che questi due tensori sono simmetrici/antisimmetrici sotto scambio degli indici.

Esercizio 11 Relazione fra forza e accelerazione

In relatività speciale, forza e accelerazione sono in generale proporzionali fra loro? Usare la definizione di forza $F = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$.

Suggerimento: scomporre l'accelerazione nella somma di un termine parallelo e un termine ortogonale alla direzione del moto (cioè alla velocità).

Soluzione dell'esercizio 11

Scomponiamo l'accelerazione $\mathbf{a}$ lungo le direzioni ortogonale e parallela al moto della particella (cioè a $\mathbf{v}$):

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel.$$

Usando il fatto che

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{c^2}\gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

e che, dalla definizione di prodotto scalare fra vettori,

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a},$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(m\gamma\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = m\gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} \\
&= m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{v}}{c^2} \\
&= m\gamma(\mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel) + m\gamma^3(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_\perp + \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_\parallel)\mathbf{v} \\
&= m\gamma\mathbf{a}_\perp + m\gamma^3\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{a}_\parallel \\
&= m\gamma\mathbf{a}_\perp + m\gamma^3\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)\mathbf{a}_\parallel \\
&= m\gamma\mathbf{a}_\perp + m\gamma^3\mathbf{a}_\parallel.
\end{aligned}$$

Si noti come, in relatività speciale, la forza non è in generale proporzionale all'accelerazione.

Esercizio 12 Classificazione dei quadrivettori

Il quadrimpulso è un quadrivettore di tipo spazio, tempo o luce?

Soluzione dell'esercizio 12

Poiché $\underline{P}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 \geq 0$, sarà di tipo tempo per particelle massive (e di tipo luce per particelle senza massa).

Esercizio 13 Energia cinetica

Quanto lavoro bisogna compiere per aumentare la velocità di un elettrone ($m = 511\,\mathrm{keV/c^2}$) dalla posizione di riposo a:

1. $0.50c$?
2. $0.990c$?
3. $0.9990c$?

Soluzione dell'esercizio 13

A questi elettroni dovremo dare una certa energia cinetica T, in modo da far passare l'energia totale da quella a riposo ($\gamma = 0$), cioè

$$E_i = mc^2,$$

a

$$E_f = T + mc^2.$$

Dalla relazione

$$E_f = m\gamma c^2$$

segue

$$T = E_f - mc^2 = m(\gamma - 1)c^2 = m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)c^2,$$

per cui nei tre casi indicati servono rispettivamente 79 keV, 3.1 MeV e 10.9 MeV.

Esercizio 14 Energia di soglia

Supponiamo di far scontrare un fascio di protoni con un protone a riposo. Qual è l'energia minima che devono avere i protoni del fascio perché la reazione

$$p + p \to p + p + p + \bar{p}$$

sia permessa? (La massa del protone è pari a quella dell'antiprotone $\bar{p}$, e vale 938 MeV/c^2.)

Esercizio 15 Diffusione elastica

Chiamiamo elastico un urto ("scattering") in cui le particelle dello stato iniziale e dello stato finale sono le stesse. Si consideri un urto elastico fra una particella di massa nulla e una particella di massa m (*bersaglio*) che si trova a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio: qual è la massima energia trasferita dalla particella incidente al bersaglio? *Suggerimento: si lavori nel sistema di riferimento del laboratorio, e si espliciti il prodotto scalare fra gli impulsi spaziali della particella di massa nulla prima e dopo l'urto in funzione dell'angolo, sempre nel sistema di riferimento del laboratorio, fra la direzione iniziale e finale della particella incidente.*

Se la particella incidente è un fotone e il bersaglio è un elettrone atomico a riposo, di quanto varia la lunghezza d'onda del fotone fra prima e dopo l'urto?

Soluzione dell'esercizio 15

Per scattering elastico intendiamo un processo in cui le particelle dello stato iniziale sono le stesse di quelle dello stato finale.

Denotiamo con $\underline{k}$ e $\underline{P}$ i quadrimpulsi della particella incidente e del bersaglio prima dell'urto, e indichiamo con l'apice le stesse quantità dopo l'urto: il problema ci dice che

$$\begin{aligned}\underline{k} &= (E, \mathbf{k}),\\ \underline{k'} &= (E', \mathbf{k'}),\\ \underline{P} &= (mc, \mathbf{0}).\end{aligned}$$

Partiamo dalla conservazione del quadrimpulso durante l'urto, isoliamo la quantità che non misuriamo direttamente – cioè il quadrimpulso del bersaglio dopo l'urto, $\underline{P'}$ – ed eleviamo al quadrato:

$$\begin{aligned}\underline{k} + \underline{P} &= \underline{k'} + \underline{P'},\\ \underline{P'} &= \underline{k} + \underline{P} - \underline{k'},\\ m^2c^2 &= 0 + m^2c^2 + 0 + 2Em - 2(EE' - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k'}) - 2mE',\end{aligned}$$

e se indichiamo con θ' l'angolo – nel riferimento del laboratorio – fra la direzione iniziale e finale della particella incidente, e usiamo il fatto che $|\mathbf{k}|c = E$ e $|\mathbf{k'}|c = E'$,

$$\begin{aligned}0 &= 2mc^2(E - E') - 2(EE' - EE'\cos\theta'),\\ mc^2(E' - E) &= -EE'(1 - \cos\theta'),\\ E'(mc^2 + E(1 - \cos\theta')) &= mc^2E,\\ E' &= \frac{E}{1 + \frac{E}{mc^2}(1 - \cos\theta')}.\end{aligned}$$

Il bersaglio rinculerà di una energia $E - E'$, massima per $\theta = \pi$. Il valore massimo di quest'energia di rinculo,

$$E - \frac{E}{1 + 2\frac{E}{mc^2}} = E\frac{2E/mc^2}{1 + 2E/mc^2},$$

prende il nome – nel caso dello scattering Compton, in cui la particella incidente è un fotone e il bersaglio è un elettrone atomico – di *picco Compton*.

Cosa cambia fra un fotone di energia E ed uno di energia E'? Dalla meccanica quantistica,

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

cioè cambia la lunghezza d'onda del fotone:

$$
\begin{aligned}
E' = \frac{hc}{\lambda'} &= \frac{\frac{hc}{\lambda}}{1 + \frac{\frac{hc}{\lambda}}{mc^2}(1 - \cos\theta')}, \\
\frac{1}{\lambda'} &= \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{\frac{hc}{\lambda}}{mc^2}(1 - \cos\theta')}, \\
\lambda' &= \lambda \left(1 + \frac{hc}{\lambda mc^2}(1 - \cos\theta')\right), \\
\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta') &\equiv \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta').
\end{aligned}
$$

dove abbiamo definito la *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone, λ_c, che rappresenta la scala di lunghezza sotto la quale gli effetti della meccanica quantistica relativistica divengono importanti.

2 Settimana 2 (21 marzo 2024)

Esercizio 16 Trasformazione delle velocità

Un oggetto si muove di moto rettilineo uniforme con velocità costante αc verso un secondo oggetto immobile. A che velocità dobbiamo muoverci noi, lungo la stessa direzione, per vedere entrambi gli oggetti muoversi con velocità uguali e opposte?

Soluzione dell'esercizio 16

Se indichiamo con l'apice la velocità nel nostro sistema di riferimento, che è in moto rispetto al sistema di riferimento del secondo oggetto, la legge di trasformazione delle velocità ci dice che

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{v_1 - V}{1 - \frac{v_1}{c}\frac{V}{c}} = \frac{\alpha c - V}{1 - \alpha\frac{V}{c}}, \\
v_2' &= \frac{v_2 - V}{1 - \frac{v_2}{c}\frac{V}{c}} = -V.
\end{aligned}
$$

Stiamo cercando V, la nostra velocità nel sistema di riferimento del secondo oggetto, tale che le velocità dei due oggetti nel nostro sistema di riferimento siano uguali e opposte,

$$
v_1' = -v_2' = V,
$$

perciò la richiesta è

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha c - V}{1 - \alpha\frac{V}{c}} &= V, \\
\alpha c - V - V + \alpha\frac{V^2}{c} &= 0, \\
(\alpha c)V^2 + (-2)V + (\alpha)c &= 0, \\
V &= \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}c,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo scelto la soluzione dell'equazione di secondo grado con $V \leq c$.

Esercizio 17 Conseguenze della relatività

Una navicella spaziale, in moto rettilineo uniforme con velocità $0.5c$ in allontanamento dalla Terra, è in orbita verso Plutone, che si trova a 7.5×10^9 km di distanza dalla Terra. Non appena raggiunto il pianeta, la comandante invia un segnale radio alla base, a Houston, per chiedere l'autorizzazione all'atterraggio. Quanto tempo impiega la richiesta a raggiungere la base, secondo la comandante? E secondo i suoi colleghi a Houston?

Soluzione dell'esercizio 17

L'onda radio viaggia a velocità c secondo ogni sistema di riferimento. Per l'osservatore, l'onda radio percorrerà il tragitto Plutone-Terra in un tempo

$$
t_{\text{Terra}} = \frac{L}{c} = \frac{7.5 \times 10^9\,\text{km}}{3 \times 10^8\,\text{m/s}} \approx 25\,000\,\text{s},
$$

mentre per la comandante sarà passato un tempo inferiore, che dipende dal fattore γ dell'astronave nel sistema di riferimento della Terra, secondo la relazione

$$t_{\text{comandante}} = \frac{t_{\text{Terra}}}{\gamma} \approx 25\,000\,\text{s} \times \sqrt{1-0.5^2} \approx 21\,650\,\text{s}.$$

Esercizio 18 Energia cinetica

Ha più energia un protone che viaggia a $0.9999999896c$ o un Boeing 747 al decollo?

Esercizio 19 Dilatazione dei tempi

Una scienziata misura che un fascio di particelle, selezionate con impulso di 10 GeV/c, si degrada dell'84% dopo aver percorso 1 m. Se la massa di queste particelle è 498 MeV/c^2, qual è la loro vita media?

Soluzione dell'esercizio 19

La distanza misurata dalla scienziata è chiaramente riferita al suo sistema di riferimento, quello del laboratorio, ed è legata alla vita media delle particelle del fascio, τ, dalla relazione

$$L_{\text{decay}} = 1\,\text{m} = \beta\gamma c\tau = \frac{pc}{E}\frac{E}{mc^2}c\tau = \frac{p}{mc}c\tau,$$

e dalla legge del decadimento, se indichiamo con N_0 il numero di particelle inizialmente presenti nel fascio e con N il numero di particelle misurato, si ha

$$\frac{N}{N_0} = 1 - 0.84 = \exp\left(-\frac{L}{L_{\text{decay}}}\right) = \exp\left(-\frac{L}{\frac{p}{mc}c\tau}\right) \to \tau = \frac{mcL}{pc\log\left(\frac{N_0}{N}\right)} \approx 9\times 10^{-11}\,\text{s}.$$

Esercizio 20 Dilatazione dei tempi

Vi trovate a dover studiare un fascio di particelle di cui conoscete l'energia – 2 GeV – ma non la massa: a quanto ne sapete, potrebbero essere composti da elettroni (di massa 511 keV/c^2) o protoni (938 MeV/c^2). Avete a disposizione due rivelatori identici, in grado di registrare con precisione il tempo in cui una particella li attraversa. Come potete utilizzarli per determinare se il vostro fascio contiene elettroni o protoni?

Soluzione dell'esercizio 20

Disponendo i due rivelatori lungo la direzione del fascio, a distanza ΔL l'uno dall'altro, si può misurare il tempo impiegato dalle particelle per passare dall'uno all'altro, e quindi la loro massa: infatti, se Δt è la distanza temporale fra i segnali dei due rivelatori,

$$\Delta L = v\Delta t = \beta c\Delta t = \frac{pc^2}{E}\Delta t.$$

Questo principio è usato nei cosiddetti rivelatori di *time of flight*, che sono usati per discriminare diversi tipi di particelle: una particella di tipo 1 e una di tipo 2, infatti, percorreranno la distanza ΔL in tempi diversi, legati alle rispettive masse dalla relazione

$$\begin{aligned}\Delta L_1 &= \Delta L_2,\\ \frac{p_1c^2}{E_1}\Delta t_1 &= \frac{\sqrt{E^2-m_1^2c^2}c}{E}\Delta t_1 = \frac{\sqrt{E^2-m_2^2c^2}c}{E}\Delta t_2.\end{aligned}$$

Esercizio 21 Energia di soglia

Due fisici delle particelle vogliono produrre il bosone Z, una particella di carica neutra e di massa $m_Z = 91\,\text{GeV/c}^2$, e discutono come fare. Alice propone di far scontrare fasci di elettroni e positroni di energia identica, che viaggiano dunque con impulso spaziale uguale in modulo e direzione ma di verso opposto, producendo Z tramite il processo

$$e^+ + e^- \to Z,$$

mentre Bob preferisce scontrare un fascio di protoni su un bersaglio fisso di idrogeno, tramite il processo

$$p + p \to Z + p + p.$$

Chi dei due avrà bisogno di fasci di particelle di energia più alta? La massa del protone è di 938.3 MeV/c^2, quella dell'elettrone di 511 keV/c^2.

Esercizio 22 Leggi di conservazione

Un fotone (particella di massa nulla) può decadere in un elettrone e in un positrone (entrambi di massa $511\,\mathrm{keV/c^2}$), tramite il processo

$$\gamma \to e^+ + e^-?$$

Esercizio 23 Decadimento β^-

Quali sono l'energia minima e massima dell'elettrone nel decadimento

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e,$$

se il neutrone decade da fermo? La massa del neutrone è di $939.6\,\mathrm{MeV/c^2}$, quella del protone di $938.3\,\mathrm{MeV/c^2}$ e quella dell'elettrone di $511\,\mathrm{keV/c^2}$; si assuma che l'antineutrino elettronico $\bar{\nu}_e$ abbia massa nulla.

Esercizio 24 Leggi di conservazione

Il decadimento

$$p \to n + e^+ + \nu_e$$

è permesso?

Esercizio 25 Unità naturali e sistema internazionale

Usando il fatto che $\hbar c = 197.3\,\mathrm{MeVfm}$, si dimostri che in un sistema di unità di misura in cui $\hbar = c = 1$ vale:

1. $1\,\mathrm{GeV}^{-2} = 0.389\,\mathrm{mb}$
2. $1\,\mathrm{m} = 5.068 \times 10^{15}\,\mathrm{GeV}^{-1}$
3. $1\,\mathrm{s} = 1.5 \times 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}$

Ricordiamo che $1\,\mathrm{b} = 1 \times 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$ e che

$$[\hbar c] = [\mathrm{Jsm/s}] = [E][L].$$

Soluzione dell'esercizio 25

L'idea è di capire per quale potenza di $\hbar c$ e c va moltiplicato il termine a sinistra di ciascuna equazione, per ottenere il termine di destra.

Per cui:

- $[1\,\mathrm{GeV}^{-2}][\hbar c]^\alpha = [E]^{-2}[E]^\alpha[L]^\alpha = [0.389\,\mathrm{mb}] = [L]^2$, da cui segue $\alpha = 2$ e $1\,\mathrm{GeV}^{-2}(\hbar c)^2 = \frac{197.3\,\mathrm{MeVfm}}{1\,\mathrm{GeV}} = \left(\frac{0.1973\times10^{-15}\,\mathrm{GeVm}}{1\,\mathrm{GeV}}\right)^2 = 0.389\,\mathrm{mb}$;
- $[1\,\mathrm{m}][\hbar c]^\alpha = [L][E]^\alpha[L]^\alpha = [5.068\times10^{15}\,\mathrm{GeV}^{-1}] = [E]^{-1}$, da cui segue $\alpha = -1$ e $1\,\mathrm{m}(\hbar c)^{-1} = \frac{1\,\mathrm{m}}{197.3\,\mathrm{MeVfm}} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0.1973\times10^{-15}\,\mathrm{GeVm}} = 5.068 \times 10^{15}\,\mathrm{GeV}^{-1}$;
- $[1\,\mathrm{s}][\hbar c]^\alpha[c]^\beta = [T][E]^\alpha[L]^\alpha[L]^\beta[T]^{-\beta} = [T][E]^\alpha[L]^{\alpha+\beta}[T]^{-\beta} = [1.5 \times 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}] = [E]^{-1}$, da cui segue $\alpha = -1, \beta = 1$ e $1\,\mathrm{s}(\hbar c)^{-1}c = \frac{1\,\mathrm{s}}{197.3\,\mathrm{MeVfm}}299\,792\,458\,\mathrm{m/s} = \frac{299\,792\,458\,\mathrm{m}}{0.1973\times10^{-15}\,\mathrm{GeVm}} = 1.5 \times 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}$.

Esercizio 26 Massa invariante

Tre protoni ($m_p = 938\,\mathrm{MeV/c^2}$) hanno impulsi uguali in modulo ($p = 3\,\mathrm{GeV/c}$) e che formano angoli di 120° l'uno con l'altro. Qual è la massa invariante del sistema?

Esercizio 27 Energia di soglia

Si consideri il processo

$$\gamma + p \to p + \pi^0,$$

dove il fotone ha massa nulla, il protone ha massa di $938\,\mathrm{MeV/c^2}$ e il π^0 ha massa di $135\,\mathrm{MeV/c^2}$.

1. Se il protone è a riposo, qual è l'energia minima che deve avere il fotone incidente perché la reazione abbia luogo?
2. La stessa reazione può avvenire nell'universo[1], in cui un protone dei raggi cosmici di alta energia può collidere con uno dei fotoni della radiazione cosmica di fondo, di energia dell'ordine di $1\,\mathrm{meV}$. Qual è in questo caso l'energia minima che deve avere il protone perché la reazione abbia luogo?

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Greisen-Zatsepin-Kuzmin_limit

Esercizio 28 Conseguenze della relatività

Un misterioso supereroe pattuglia, a velocità molto elevata, la periferia romana. All'incrocio con via di Tor Bella Monaca incontra un semaforo e – vedendolo verde – attraversa senza rallentare. Una pattuglia della polizia municipale lo ferma e lo multa per esser passato col rosso. Assumendo sia il supereroe che i vigili siano nel giusto, a che velocità viaggiava il supereroe?

Soluzione dell'esercizio 28

Per la polizia municipale, il semaforo emette fotoni di energia

$$E_0 = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_{\text{rosso}}} \approx \frac{hc}{630\,\text{nm}},$$

mentre il supereoe vede fotoni di energia

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\text{verde}}} \approx \frac{hc}{490\,\text{nm}},$$

e dalle trasformazioni di Lorentz, indicando con γ e β le variabili calcolate usando la velocità del supereroe misurata dalla municipale, possiamo scrivere

$$E = \gamma(E_0 - \beta p_0) = \gamma(E_0 - \beta E_0) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}E_0 = \frac{1-\beta}{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}E_0 = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}E_0,$$

dove abbiamo usato il fatto che i fotoni hanno massa nulla. Perciò,

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\frac{hc}{\lambda_{\text{verde}}}}{\frac{hc}{\lambda_{\text{rosso}}}} = \frac{\lambda_{\text{rosso}}}{\lambda_{\text{verde}}} = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} \to v = \beta c = 0.25c.$$

Esercizio 29 Conseguenze della relatività

I neutrini sono particelle di massa molto piccola e al momento ignota. Uno dei modi con cui è stato possibile dedurre un limite superiore al suo valore è stata l'osservazione, nel 1987, di neutrini prodotti dalla supernova 1987A[2], che si trova a 168000 anni luce dalla Terra. Sono stati osservati due segnali di neutrini, che possono essere schematizzati come segue: si è osservato prima un neutrino di 35 MeV di energia, seguito a 9 s di distanza da un secondo segnale di 13 MeV. Si assuma che questo ritardo sia dovuto al fatto che la massa del neutrino non è nulla, e si calcoli quest'ultima.

Esercizio 30 Legge di decadimento

Animali e piante assumono dall'atmosfera diversi composti contenenti carbonio. Il carbonio presente nell'atmosfera è predominantemente ${}^{12}_{6}C$, ma sono presenti piccole concentrazioni del suo isotopo ${}^{14}_{6}C$ (un atomo ogni 10^{12}), che decade con emissione di elettroni attraverso il processo[3]

$${}^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}_e,$$

con un tempo di dimezzamento di 5700 anni.

1. Qual è la concentrazione di ${}^{14}_{6}C$ dopo 11400 anni?
2. Animali e piante assumono in vita proporzioni fisse di ${}^{14}_{6}C$ e ${}^{12}_{6}C$, mentre alla loro morte la quantità di ${}^{14}_{6}C$ inizia a diminuire. Avete a portata di mano un relitto di legno, per cui misurate una emissione di elettroni dal decadimento di ${}^{14}_{6}C$ pari al 61% di quella di un pezzo di legno "vivo" della stessa massa: quanti anni ha il manufatto?

Esercizio 31 Energia cinetica e trasformazioni di Lorentz

Due particelle identiche di massa m ed energia cinetica T collidono frontalmente. Qual è la loro energia cinetica relativa (ossia l'energia cinetica di una particella misurata nel sistema di riferimento dell'altra particella)?

Esercizio 32 Energia nel centro di massa

La reazione

$$\pi^- p \to K^0 \Lambda^0$$

avviene con un'energia nel centro di massa di $\sqrt{s} = 3\,\text{GeV}$. La massa del π^- è di $139.6\,\text{MeV/c}^2$, la massa del protone è di $938\,\text{MeV/c}^2$, la massa del K^- è di $498\,\text{MeV/c}^2$ e quella della Λ^0 di $1.1\,\text{GeV/c}^2$

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/SN_1987A`

[3] Di altro non si tratta che del decadimento β^-, $n \to p + e + \bar{\nu}_e$.

1. Calcolare l'impulso di π^- e Λ^0 nel sistema di riferimento del centro di massa.
2. Se il protone è a riposo, il K può essere emesso all'indietro nel sistema di riferimento del laboratorio?

Esercizio 33 Decadimento

Il mesone ϕ^0 è una particella neutra[4] di circa $1\,\mathrm{GeV/c^2}$ di massa, che può decadere in una coppia di particelle,

$$\phi^0 \to K^+ + K^-,$$

di massa identica $m_K = 494\,\mathrm{MeV/c^2}$. Si assuma di produrre ϕ^0 di impulso noto: è possibile che uno dei due K sia prodotto a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio?

Esercizio 34 Decadimento

Un fascio di anti-neutrini muonici, $\bar{\nu}_\mu$, si può generare selezionando pioni o kaoni, π^+ e K^+, e facendoli passare in un lungo tubo in cui è stato fatto il vuoto[5], in modo che dopo un certo tragitto L una buona parte di loro sarà decaduta tramite i processi

$$\pi^+ \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu,$$
$$K^+ \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Se l'impulso di pioni e kaoni è di $200\,\mathrm{GeV/c}$, e la loro vita media di $26\,\mathrm{ns}$ e $12\,\mathrm{ns}$, rispettivamente:

1. Quanto a lungo viaggiano nel laboratorio i due tipi di particelle?
2. Se $L = 1000\,\mathrm{m}$, quale sarà la frazione di pioni e kaoni che sarà decaduta alla fine del tubo?
3. Qual è l'energia massima dei neutrini che è possibile misurare nel sistema di riferimento del laboratorio, nei due casi?

[4] Il collisore DAFNE ai Laboratori Nazionali di Frascati produce specificatamente particelle di questo tipo, tramite il processo $e^+ + e^- \to \phi^0$: `https://www.youtube.com/watch?v=L5yB9gDGKms`.

[5] Una tecnica di questo tipo è stata usata per inviare ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso dei fasci di neutrini prodotti al CERN di Ginevra: `https://videos.cern.ch/record/985892`.