Secondo compito di esonero del Corso di Elettricità e Magnetismo A.A. 2006/2007

16 Marzo 2007

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci)

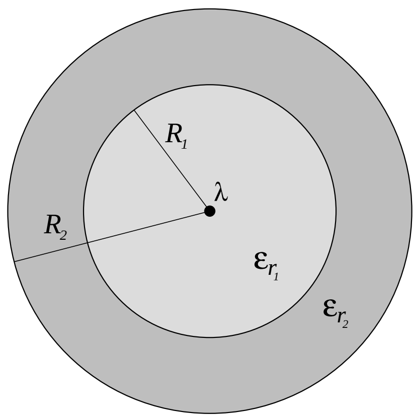
Esercizio 1

Un filo rettilineo indefinito uniformemente carico con densità lineare di carica $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-8}$ C/cm si trova sull'asse di un cilindro di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo con $\epsilon_{r_1} = 3$ di raggio $R_1 = 3.0$ cm e di un guscio cilindrico di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo con $\epsilon_{r_2} = 4$, raggio interno R_1 ed esterno $R_2 = 5.0$ cm (in figura viene mostrata una sezione perpendicolare all'asse dei cilindri). Determinare:

a) l'espressione del campo di induzione dielettrica **D** e del campo elettrico **E** in funzione della distanza radiale r dall'asse del cilindro;

b) la differenza di potenziale tra la superficie di separazione tra i due dielettrici ($r = R_1$) e quella esterna del secondo dielettrico ($r = R_2$);

c) il valore della densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie di separazione tra i due dielettrici.



Esercizio 2

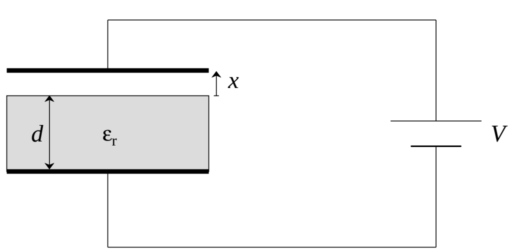
Un condensatore piano con armature di superficie $S = 150$ cm^2 e distanza tra esse variabile è connesso ad un generatore di tensione $V = 200$ V ed ha al suo interno una lastra di mica ($\epsilon_r = 7.6$) di spessore d (vedi figura). Nella situazione iniziale la distanza tra le armature del condensatore è d e la sua capacità vale $C_i = 150$ pF. Applicando una forza esterna l'armatura superiore viene quindi allontanata (mantenendo vincolata la parte inferiore del condensatore) sino alla posizione finale $d + x_f$ ($x_f = 9$ mm). Determinare:

a) l'espressione della capacità del condensatore $C(x)$ in funzione dello spostamento x dell'armatura superiore, calcolandone in particolare il valore per lo spostamento finale x_f;

b) l'espressione della forza elettrostatica tra le armature $F(x)$, specificandone il verso;

c) il lavoro compiuto dalla forza esterna per allontanare l'armatura sino alla posizione finale;

d) il lavoro fatto dal generatore durante tutto lo spostamento.



Soluzione Esercizio 1

a) Per simmetria i campi sono diretti radialmente e dipendono dalla sola coordinata radiale r. Dal teorema di Gauss per il campo induzione dielettrica $\Phi(\mathbf{D}) = Q$, si ha, considerando superfici cilindriche di raggio r e altezza h, $D 2\pi r h = \lambda h$, e quindi

$$D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad \text{per ogni} \;\; r > 0$$

Dalla relazione $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$, si ottiene

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_1} r} & \text{se } 0 < r < R_1 \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_2} r} & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

b) La differenza di potenziale richiesta è

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{R_1}^{R_2} dr \; \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_2} r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{r_2}} \ln R_2/R_1 \simeq 3.4 \cdot 10^3 \text{ V} .$$

c) La densità di carica di polarizzazione si ottiene dalla relazione $\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$, con $\mathbf{n}$ normale uscente dalla superficie del dielettrico e $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$ vettore di polarizzazione. Sulle superficie esterna ($r = R_1^-$) del primo dielettrico si ha (tenendo conto delle orientazioni dei vettori normali uscenti)

$$\sigma_{p_1} = \epsilon_0(\epsilon_{r_1} - 1)\; E^-(R_1) = \frac{(\epsilon_{r_1} - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_{r_1} R_1} ,$$

mentre sulle superficie interna ($r = R_1^+$) del secondo dielettrico si ha

$$\sigma_{p_2} = -\epsilon_0(\epsilon_{r_2} - 1)\; E^-(R_1) = -\frac{(\epsilon_{r_2} - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_{r_2} R_1} .$$

La somma dei due contributi fornisce la densità di carica di polarizzazione presente sulla superficie di separazione

$$\sigma_p = \sigma_{p_1} + \sigma_{p_2} = -\frac{\lambda}{2\pi R_1}\frac{\epsilon_{r_2} - \epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}\epsilon_{r_1}} \simeq \; -6.6 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2 .$$

Soluzione Esercizio 2

a) Nella posizione iniziale la capacità del condensatore è $C_i = \epsilon_o \epsilon_r S/d$, da cui si ricava d:

$$d = \frac{\epsilon_o \epsilon_r S}{C_i} \simeq 6.73 \cdot 10^{-3} \text{ m} .$$

La capacità in funzione di x si ricava dall' espressione $V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ e tenendo conto che il campo vale σ/ϵ_o nel vuoto e $\sigma/\epsilon_o\epsilon_r$ nel dielettrico (con $\sigma = Q/S$):

$$C(x) = \frac{\epsilon_o \epsilon_r S}{\epsilon_r x + d}$$

Nella posizione finale si ha

$$C_f = C(x_f) = \frac{\epsilon_o \epsilon_r S}{\epsilon_r x_f + d} \simeq 13.4 \text{ pF} .$$

b) La forza si ottiene derivando l'energia U del condensatore rispetto ad x (con il segno + dovuto al fatto che è presente il generatore):

$$F(x) = +\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{C(x)V^2}{2} = -\frac{\epsilon_o \epsilon_r^2 S V^2}{2} \frac{1}{(\epsilon_r x + d)^2}$$

Tale forza risulta quindi attrattiva.

c) La forza esterna che bisogna applicare per spostare la lastra è $F_e = -F$ (con F forza elettrostatica tra le armature). Il lavoro $\mathcal{L}_e$ compiuto da tale forza è

$$\mathcal{L}_e = \int_0^{x_f} F_e dx = -\int_0^{x_f} F dx = -\int_{U_i}^{U_f} dU = U_i - U_f = \frac{V^2}{2}(C_i - C_f) \simeq 2.73 \cdot 10^{-6} \text{ J} .$$

d) Il lavoro $\mathcal{L}_g$ compiuto dal generatore durante l'intero spostamento è dovuto allo spostamento di cariche sulle armature per mantenere la differenza di potenziale costante:

$$\mathcal{L}_g = \int_{Q_i}^{Q_f} dQ\ V = V(Q_f - Q_i) = V^2(C_f - C_i) = -2\mathcal{L}_e \simeq -5.46 \cdot 10^{-6} \text{ J} .$$