

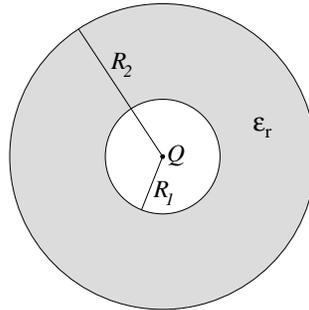
Modalità

- Recupero I° esonero di Elettromagnetismo: Esercizio 3 (2 ore)
- Recupero II° esonero di Elettromagnetismo: Esercizio 4 (2 ore)
- Prova scritta di Elettromagnetismo: Esercizi 3 e 4 (3 ore)
- Prova scritta di Eletticità e Magnetismo: Esercizi 1 e 2 (3 ore)
- Prova scritta di Eletticità e Magnetismo e di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 3 e 4 (4 ore)
- Prova scritta di Eletticità e Magnetismo e recupero I° esonero di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 2 e 3 (4 ore)
- Prova scritta di Eletticità e Magnetismo e recupero II° esonero di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 2 e 4 (4 ore)

**Esercizio 1**

Una carica puntiforme  $Q = 4 \cdot 10^{-8}$  C viene posta al centro di uno strato sferico di raggio interno  $R_1 = 10$  cm ed esterno  $R_2 = 20$  cm composto da materiale dielettrico omogeneo ed isotropo di costante dielettrica  $\epsilon_r = 4$ .  
 Determinare:

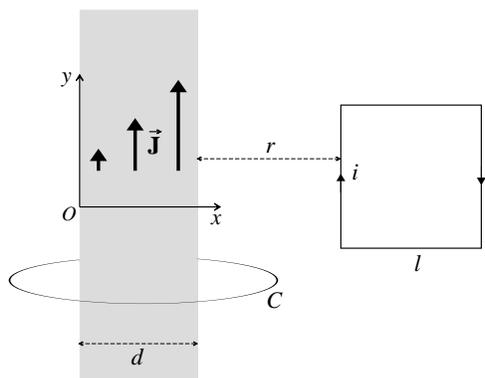
- a) l'espressione del campo elettrico in funzione della distanza radiale dalla carica puntiforme;
- b) il valore delle cariche di polarizzazione sulle due facce del dielettrico;
- c) il lavoro compiuto per portare la carica  $Q$  all'infinito.



**Esercizio 2**

Un nastro conduttore non omogeneo indefinito di spessore trascurabile e larghezza  $d = 6$  cm è percorso da una corrente  $I$  distribuita non uniformemente sul nastro, con densità lineare di corrente data dall'espressione  $J(x) = ax$  e diretta lungo  $y$ . La circuitazione del campo  $\mathbf{B}_0$  lungo una linea chiusa  $C$  concatenata con il nastro vale  $1.9 \cdot 10^{-5}$  Wb/m.  
 Determinare:

- a) il valore della corrente  $I$ ;
- b) il valore della costante  $a$ ;
- c) l'espressione del campo  $\mathbf{B}_0$  nel piano del nastro (nella regione  $x > d$ ) in funzione della distanza  $r$  dal bordo del nastro;
- d) il valore della forza (specificando se attrattiva o repulsiva) che agisce su una spira quadrata di lato  $l = d/2$  percorsa da una corrente  $i = 2$  A circolante in senso orario disposta sul piano del nastro ad una distanza dal bordo  $r = d/2$ .

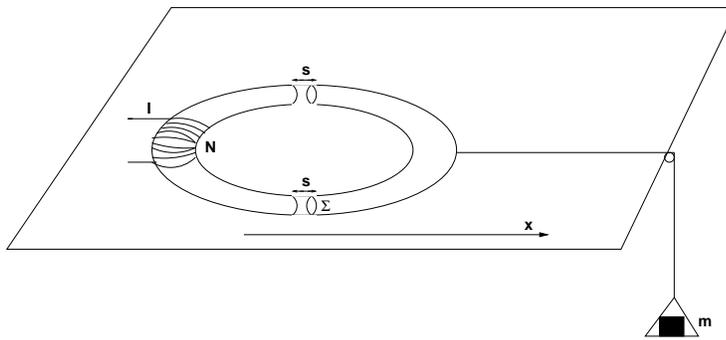


### Esercizio 3

Un toro costituito da lega ferromagnetica con  $\mu_r = 400$  (costante), di sezione  $\Sigma = 60 \text{ cm}^2$  e lunghezza media  $l = 2.4 \text{ m}$ , è posto su di un piano orizzontale. Il toro è tagliato trasversalmente in due punti diametralmente opposti, uno dei due semi-tori è fissato al piano, mentre il secondo semi-toro può scorrere sul piano, senza attrito, lungo la direzione  $x$ , come indicato in figura. Il circuito eccitatore è di forma solenoidale con  $N = 1500$  spire ed è percorso dalla corrente  $I = 1.6 \text{ A}$ , mantenuta costante da un generatore esterno. Il secondo semi-toro viene allontanato, in modo tale che si creino due traferri, ciascuno di spessore  $s = 6.0 \text{ mm}$ , e mantenuto in posizione tramite due spessori indeformabili di legno (di permeabilità magnetica relativa  $\mu'_r = 1$ ) posti nello spazio dei traferri. A tale semi-toro è collegato un filo inestensibile di massa trascurabile al quale può essere appesa una massa  $m$  (vedi figura).

Calcolare:

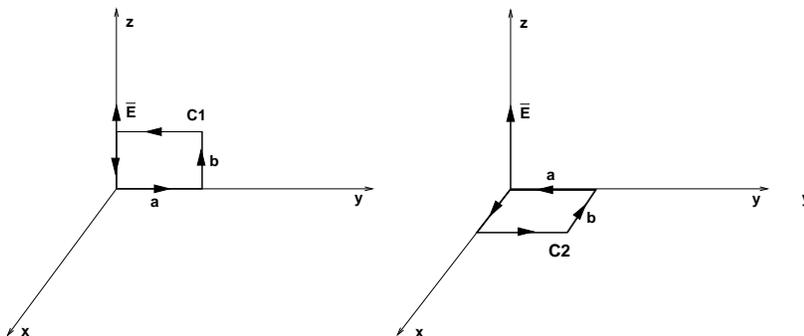
- l'intensità di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  nel materiale ferromagnetico quando i due semi-tori non sono ancora stati separati;
- l'intensità di  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  nel materiale ferromagnetico e nei traferri a separazione avvenuta;
- la variazione di energia magnetica nell'operazione di separazione dei due semi-tori;
- il valore minimo della massa  $m$  necessario per provocare il distacco del semitoro dagli spessori di legno.



### Esercizio 4

Un'onda elettromagnetica piana, sinusoidale di frequenza  $\nu = 200 \text{ MHz}$  ha il campo elettrico di ampiezza  $A = 20.0 \text{ Vm}^{-1}$  nella direzione dell'asse  $z$  e si propaga nel vuoto nella direzione positiva dell'asse  $y$ . Al tempo  $t=0$  il campo elettrico nell'origine è nullo e di valore decrescente (nel tempo). Si considerino due cammini rettangolari  $C_1$  e  $C_2$  giacenti rispettivamente sul piano  $yz$  e sul piano  $xy$ , con un vertice nell'origine degli assi e i lati paralleli agli assi e orientati in verso positivo, secondo la regola della vite (destra), rispetto agli assi ad essi ortogonali. Il lato parallelo all'asse  $y$  ha lunghezza  $a = \lambda/4$  mentre l'altro lato ha lunghezza  $b = 3.0 \text{ m}$ .

- Si scrivano le espressioni delle componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$  del campo elettrico  $\mathbf{E}$  e del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in funzione delle coordinate spaziali e temporali.
- Si scriva l'espressione in funzione del tempo e si calcoli il valore al tempo  $t = 0$  della circuitazione  $f$  del campo elettrico  $\mathbf{E}$  sul cammino  $C_1$ .
- Si scriva l'espressione in funzione del tempo e si calcoli il valore al tempo  $t = 0$  del flusso  $\Phi(\mathbf{B})$  dell'induzione magnetica  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie delimitata da  $C_1$ .
- Si mostri che è verificata la legge di Faraday-Neumann.
- Si scriva l'espressione in funzione del tempo della corrente di spostamento  $I_s$  attraverso una superficie delimitata da  $C_2$ .
- Si calcoli il rapporto fra la circuitazione  $f$  del campo elettrico e la corrente di spostamento  $I_s$  calcolate nei precedenti punti b) ed e).



## Soluzione Esercizio 1

a) Dal teorema di Gauss per il campo induzione dielettrica  $\Phi(\mathbf{D}) = Q$ , si ha, considerando superfici sferiche di raggio  $r$  centrate nella carica  $Q$ :  $D = Q/(4\pi r^2)$ . Dalla relazione  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$ , si ottiene

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} && \text{per } r < R_1 \quad (\text{nel vuoto}) \\ E(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} && \text{per } R_1 \leq r \leq R_2 \quad (\text{nel dielettrico}) \\ E(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} && \text{per } r > R_2 \quad (\text{nel vuoto}) \end{aligned}$$

b) La densità di carica di polarizzazione si ottiene dalla relazione  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , con  $\mathbf{n}$  normale uscente dalla superficie del dielettrico e  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$  vettore di polarizzazione. Quindi sulle superfici interna ed esterna del dielettrico si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} \sigma_p(R_1) &= -|\mathbf{P}(R_1)| = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1) E(R_1) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_1^2} \\ \sigma_p(R_2) &= +|\mathbf{P}(R_2)| = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) E(R_2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_2^2} \end{aligned}$$

avendo tenuto conto del verso di  $\mathbf{n}$  rispetto a  $\mathbf{P}$ . Le cariche di polarizzazione sulle superfici valgono pertanto:

$$\begin{aligned} Q_p(R_1) &= 4\pi R_1^2 \sigma_p(R_1) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q = -3 \cdot 10^{-8} \text{ C} \\ Q_p(R_2) &= 4\pi R_2^2 \sigma_p(R_2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q = -Q_p(R_1) = 3 \cdot 10^{-8} \text{ C} \end{aligned}$$

c) Il lavoro per portare la carica  $Q$  all'infinito è dato dalla differenza di energia elettrostatica del sistema tra la configurazione finale (carica all'infinito) e quella iniziale (carica al centro dello strato dielettrico)  $\mathcal{L} = U_\infty - U_0$ . Scrivendo la densità di energia elettrostatica nella forma  $u = D^2/2\epsilon$  (con  $\epsilon = \epsilon_0$  nel vuoto e  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  nel dielettrico) si ottiene nel caso di separazione infinita tra carica e dielettrico

$$U_\infty = \int dV \frac{D^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2},$$

mentre nella situazione di carica al centro dello strato dielettrico

$$U_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^{R_1} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_2}^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = U_\infty - \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}.$$

Si ottiene quindi per il lavoro:

$$\mathcal{L} = \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2(\epsilon_r - 1)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \simeq 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Si noti che entrambe le energie  $U_0$  e  $U_\infty$  hanno valore infinito (dovuto ai contributi divergenti dei campi calcolati al centro della carica), ma nella differenza tali divergenze si eliminano dando un risultato finito.

## Soluzione Esercizio 2

a) Dal teorema della circuitazione di Ampère  $\oint \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$  si ottiene:

$$I \simeq 15 \text{ A} .$$

b) Dalla condizione

$$I = \int_0^d dx J(x) = \frac{ad^2}{2} ,$$

si ottiene

$$a = \frac{2I}{d^2} \simeq 8.3 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2 .$$

c) Consideriamo una striscia infinitesima di larghezza  $dx$  e posizione  $x$ . La corrente su tale striscia è  $dI = J(x)dx = (2Ix/d^2)dx$ , per cui il campo infinitesimo  $dB_0$  da essa generato in un punto del piano distante  $r$  dal bordo del nastro (e quindi  $r + d - x$  dalla striscia infinitesima) è:

$$dB_0(r) = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(r + d - x)} dx = \frac{\mu_0 I x}{\pi d^2 (r + d - x)} dx ,$$

diretto perpendicolarmente (con verso entrante) al piano del nastro. Il campo si ottiene integrando nella variabile  $x$

$$B_0(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi d^2} \int_0^d dx \frac{x}{r + d - x} = \frac{\mu_0 I}{\pi d^2} [(r + d) \log(1 + d/r) - d] ,$$

come si ottiene facilmente con il cambio di variabile  $x' = r + d - x$ .

d) La risultante della forza sulla spira è data dalla somma delle forze sui tratti di spira paralleli al nastro (di segno opposto)

$$F = -ilB_0(r) + ilB_0(r + l) = -\frac{il\mu_0 I}{\pi d^2} [(r + d) \log(1 + d/r) - (r + l + d) \log(1 + d/(r + l))] ,$$

e sostituendo i valori del problema

$$F = -\frac{\mu_0 i I}{4\pi} (3 \log 3 - 4 \log 2) \simeq -1.6 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

(forza attrattiva).

### Soluzione Esercizio 3

a) Il campo magnetico  $\mathbf{H}$  può essere calcolato usando il Teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint H \cdot dl = Hl = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{l} = 1 \cdot 10^3 \text{ As/m}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = 0.5 \text{ T}$$

b) Quando i due semitori sono separati:

$$\oint H \cdot dl = H'l + H'_0 2s = NI, \text{ inoltre avremo:}$$

$$B' = B'_0 = \mu_0 H'_0 = \mu_0 \mu_r H',$$

da cui:

$$\frac{l}{\mu_0 \mu_r} B' + \frac{2s}{\mu_0} B'_0 = NI \Rightarrow B' = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{l + 2s \mu_r} = 0.17 \text{ T,}$$

$$H'_0 = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{\mu_r NI}{l + 2s \mu_r} = 1.3 \cdot 10^5 \text{ As/m,}$$

$$H' = \frac{B'}{\mu_0 \mu_r} = \frac{NI}{l + 2s \mu_r} = 3.3 \cdot 10^2 \text{ As/m.}$$

c) La differenza di energia magnetica è:

$$\Delta U_m = U_m^{finale} - U_m^{iniziale}, \text{ dove:}$$

$$U_m^{iniziale} = \frac{1}{2} BH \cdot \tau, \text{ con } \tau = \Sigma l \text{ volume del toro.}$$

Sostituendo  $B$  e  $H$  ricavati precedentemente si ottiene:

$$U_m^{iniziale} = \frac{1}{2} \Sigma \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l}.$$

Quando i due semitori sono stati separati si ha:

$$U_m^{finale} = \frac{1}{2} B'(H' \cdot \tau + H'_0 \cdot \tau_0),$$

con  $\tau_0 = 2s\Sigma$  il volume dei due traferri.

Sostituendo le espressioni di  $B'$ ,  $H'$  e  $H'_0$  ricavate in precedenza, si ottiene:

$$U_m^{finale} = \frac{1}{2} B'(H'l + H'_0 2s)\Sigma = \frac{1}{2} \Sigma \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l + 2s \mu_r}.$$

Avremo quindi:

$$\Delta U_m = U_m^{finale} - U_m^{iniziale} = \frac{1}{2} \Sigma \mu_0 \mu_r (NI)^2 \left( \frac{1}{l + 2s \mu_r} - \frac{1}{l} \right) = -2.41 \text{ J.}$$

d) Il generatore esterno mantiene costante la corrente nel circuito eccitatore, per cui:

$$F_m = + \frac{\partial U_m(x)}{\partial x}.$$

L'energia magnetica quando i due traferri sono ad una distanza  $x$ , è:

$$U_m(x) = \frac{1}{2} \Sigma \mu_0 \mu_r \frac{(NI)^2}{l + 2x \mu_r},$$

per cui:

$$F_m(x) = + \frac{\partial U_m(x)}{\partial x} = - \Sigma \mu_0 \mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{(l + 2x \mu_r)^2}.$$

La massa  $m$  minima posta sul piano della bilancia che provocherà la separazione dei due semi-tori sarà quella per cui la forza peso controbilancia esattamente la forza magnetica attrattiva:  $F_m(s) = mg$ , per cui:

$$m = \frac{F_m(s)}{g} = \frac{1}{g} \Sigma \mu_0 \mu_r^2 (NI)^2 \frac{1}{(l + 2s \mu_r)^2} = 13.7 \text{ Kg.}$$

#### Soluzione Esercizio 4

$$\begin{aligned} \text{a) } E_z &= A \sin(ky - \omega t), E_x = E_y = 0 \\ B_x &= A/c \sin(ky - \omega t), B_y = B_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f &= \int_0^b A \sin(\pi/2 - \omega t) dz + \int_b^0 A \sin(-\omega t) dz = A b [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \\ f &\equiv f_o \sin(\omega t + \phi_f) : \phi_f = \pi/4, f_o = A b \sqrt{2} \\ \text{Al tempo } t = 0: f(t = 0) &= A b = 60 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \Phi(\mathbf{B}) &= b \int_0^{\lambda/4} A/c \sin(ky - \omega t) dy = \frac{bA}{ck} [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \\ \Phi(\mathbf{B}) &\equiv \Phi_o \sin(\omega t + \phi_\Phi) : \Phi_o = \frac{bA}{ck} \sqrt{2}, \phi_\Phi = \frac{3\pi}{4} \\ \text{Al tempo } t = 0: \Phi(\mathbf{B})(t = 0) &= \frac{bA}{ck} = \frac{bA}{2\pi\nu} = 4.77 \cdot 10^{-8} \text{ Wb.} \end{aligned}$$

$$\text{d) } -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{bA}{ck} \omega [-\sin(\omega t) - \cos(\omega t)] = bA [\sin(\omega t) + \cos(\omega t)] \text{ c.d.d.}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \mathbf{J}_s &= \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ I_s &= \int_{S_2} \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{S} = -b\epsilon_o A \omega \int_0^{\lambda/4} \cos(ky - \omega t) dy \\ I_s &= -\frac{bA}{Z_o} [\cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \end{aligned}$$

$$\text{f) } \frac{f}{I_s} = -Z_o = -377 \Omega$$