

Modalità

- Prova scritta di Elettività e Magnetismo: Esercizi 1 e 2 (3 ore)
- Prova scritta di Elettromagnetismo: Esercizi 3 e 4 (3 ore)
- Prova scritta di Elettività e Magnetismo e di Elettromagnetismo: Esercizi 1, 3 e 4 (4 ore)

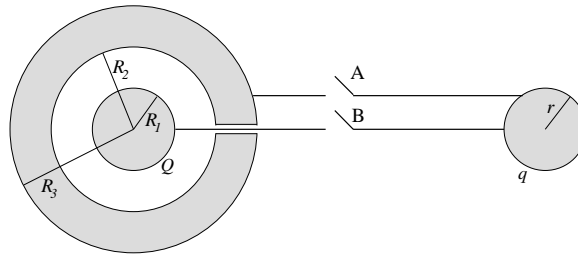
**Esercizio 1**

Un condensatore sferico è costituito da una sfera conduttrice interna di raggio  $R_1 = 20$  cm ed una calotta sferica conduttrice di raggio interno  $R_2 = 40$  cm ed esterno  $R_3 = 60$  cm. Sulla sfera interna è depositata una carica  $Q = 7 \cdot 10^{-7}$  C. A grande distanza dal condensatore (in modo da trascurare gli effetti di mutua induzione elettrostatica) è posta una sfera conduttrice di raggio  $r = 20$  cm su cui è depositata una carica  $q = 4 \cdot 10^{-7}$ .

Due fili sottili metallici di capacità trascurabile possono collegare tra loro la sfera di raggio  $r$  rispettivamente al conduttore esterno (filo A) e a quello interno (filo B) del condensatore.

Determinare le cariche sulle superfici dei tre conduttori ( $q'$  sulla sfera di raggio  $r$ ,  $Q'$  sulla sfera interna del condensatore di raggio  $R_1$  e  $Q'_e$  sulla superficie esterna del condensatore di raggio  $R_3$ ) considerando i tre possibili casi di collegamento tra i conduttori a partire dalla condizione iniziale data:

- a) sfera esterna collegata al guscio sferico del condensatore: A chiuso, B aperto; si determini inoltre il valore dell'energia elettrostatica del condensatore sferico;
- b) sfera esterna collegata alla sfera interna del condensatore: A aperto, B chiuso;
- c) sfera esterna collegata al guscio e alla sfera interna del condensatore: A chiuso, B chiuso.

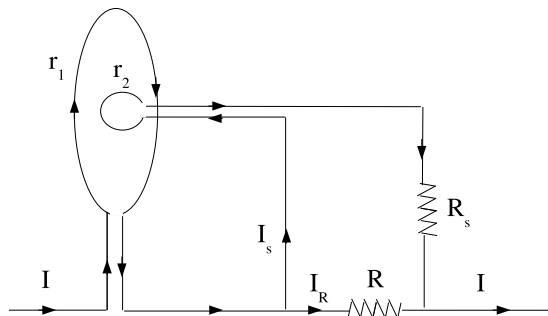


**Esercizio 2**

Lungo un circuito elettrico percorso da una corrente  $I$  viene inserito il dispositivo illustrato in figura. Esso è composto da una spira circolare di raggio  $r_1$ , percorsa dalla corrente  $I$ , e da una seconda spira di raggio  $r_2$  con  $r_2 \ll r_1$ , posta con una resistenza  $R_s$  in parallelo a un carico  $R$ . La spira più piccola si trova al centro della spira grande e in un piano ad essa perpendicolare.

- a) Si calcoli il momento magnetico della piccola spira.
- b) Si determini il momento delle forze agente sulla spira più piccola.
- c) Si determini la potenza dissipata sul carico  $R$  e la si metta in relazione con il momento calcolato al punto b) utilizzando l'approssimazione  $R \ll R_s$ .

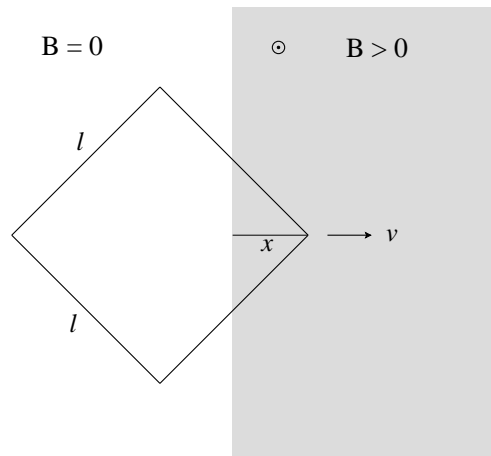
[Dati:  $I = 70$  A,  $r_1 = 10$  cm,  $r_2 = 1$  mm,  $R = 0.2 \Omega$ ,  $R_s = 400 \Omega$ ]



### Esercizio 3

Una spira quadrata di lato  $l = 10$  cm e resistenza  $R = 3 \Omega$  si muove con velocità costante  $v = 2$  m/s lungo la direzione di una sua diagonale. Ad un certo istante la spira entra, con velocità perpendicolare al piano di separazione, in una regione in cui è presente un campo di induzione magnetica uniforme e costante  $B = 0.3$  T, perpendicolare al piano della spira. Supponendo di mantenere costante la velocità della spira e indicando con  $x$  il tratto di spira penetrata nella regione dove è presente il campo, determinare (si trascurino gli effetti di autoinduzione):

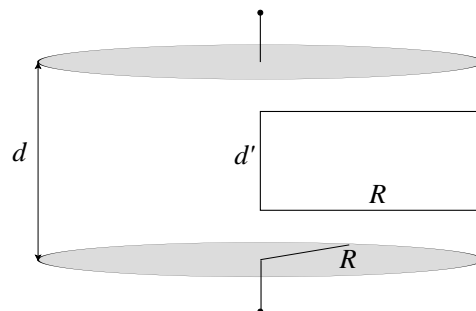
- l'espressione, in funzione di  $x$ , della corrente indotta nella spira;
- l'espressione, in funzione di  $x$ , della forza che bisogna applicare alla spira per mantenere costante la sua velocità;
- l'energia totale dissipata dalla spira per effetto Joule quando è per metà penetrata nella regione in cui è presente il campo.



### Esercizio 4

Le armature circolari di un condensatore piano di raggio  $R = 100$  cm a distanza reciproca  $d = 1$  cm, sono collegate ai capi di un generatore di potenziale:  $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ , con  $V_0 = 1000$  V e  $T = 2\pi/\omega = 10^{-3}$  s. Considerando il campo elettrico uniforme in ogni punto del condensatore e trascurando gli effetti di bordo, si determini:

- l'espressione del campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  in funzione del tempo in ogni punto all'interno del condensatore;
- l'espressione del vettore di Poynting in funzione del tempo in ogni punto all'interno del condensatore;
- il valore del flusso totale di energia (indicando se entrante od uscente) attraverso la superficie delimitante il condensatore dal tempo  $t = 0$  a  $t = T/4$ ;
- l'espressione ed il valore efficace della forza elettromotrice indotta in una spira rettangolare di altezza  $d' = 0.5$  cm e base  $R$  posta tra le armature del condensatore con il lato minore sull'asse di questo.



## Soluzione Esercizio 1

Denotiamo con  $q'$ ,  $Q'$  e  $Q'_e$  rispettivamente le cariche sulla sfera di raggio  $r$ , sulla sfera di raggio  $R_1$  e sulla superficie esterna del guscio sferico dopo il collegamento (sulla superficie interna del guscio si ha sempre induzione completa con carica  $-Q'$ ), e con  $V_r$ ,  $V$  e  $V_e$  i rispettivi potenziali.

a) In tal caso  $Q' = Q$  (sfera  $R_1$  isolata) e per la conservazione della carica  $Q'_e + q' = Q + q$  (essendo  $Q$  la carica iniziale sulla superficie esterna del guscio a causa dell'induzione completa della sua superficie interna con la sfera  $R_1$ ). Inoltre devono essere equipotenziali i due conduttori collegati  $V_e = V_r$ , da cui, scrivendo  $V_e = Q'_e/(4\pi\epsilon_0 R_3)$  e  $V_r = q'/(4\pi\epsilon_0 r)$ , e usando la relazione di conservazione delle cariche si ottiene:

$$\begin{aligned} Q'_e &= \frac{Q+q}{R_3+r} R_3 \simeq 8.25 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ q' &= \frac{Q+q}{R_3+r} r \simeq 2.75 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{aligned}$$

Per l'energia del condensatore si ha:

$$U = \frac{Q'^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \simeq 5.51 \cdot 10^{-3} \text{ J},$$

essendo  $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$  la capacità del condensatore.

b) In tal caso la carica totale  $Q + q$  si distribuisce sulle due sfere di raggi  $R_1$  e  $r$  in modo da renderle equipotenziali ( $Q' + q' = Q + q$  e  $V = V_r$ ). Il potenziale della sfera esterna è dato sempre dalla relazione  $V_r = q'/(4\pi\epsilon_0 r)$ , mentre quello della sfera interna del condensatore  $V$  si ottiene dalla relazione  $V - V_e = Q'/C$ , dove  $C$  è la capacità del condensatore sferico e  $V_e = Q'_e/(4\pi\epsilon_0 R_3)$  è il potenziale del guscio esterno (la carica  $Q'_e$  sulla superficie esterna del guscio è uguale a quella sulla sfera interna per induzione,  $Q'_e = Q'$ ). Risolvendo il sistema si ha quindi

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{Q+q}{r} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r} \right)^{-1} \\ q' &= Q + q - Q' \end{aligned}$$

Usando i valori del problema ( $r = R_1$ ,  $R_2 = 2R_1$ ,  $R_3 = 3R_1$ ) si ha

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{6}{11}(Q+q) \simeq 6.0 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ q' &= \frac{5}{11}(Q+q) \simeq 5.0 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{aligned}$$

c) In tal caso, essendo i due conduttori del condensatore allo stesso potenziale,  $Q' = 0$ . La carica totale  $Q + q$  si dispone quindi solo sulla superficie esterna del guscio e sulla sfera  $r$ . Le relazioni da imporre sono  $Q'_e + q' = Q + q$  e  $V_e = V_r$ , identiche al caso a). Per cui si ottiene la stessa soluzione (la sola differenza è nella carica del conduttore interno del condensatore, che in tal caso è nulla)

$$\begin{aligned} Q'_e &= \frac{Q+q}{R_3+r} R_3 \simeq 8.25 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ q' &= \frac{Q+q}{R_3+r} r \simeq 2.75 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{aligned}$$

## Soluzione Esercizio 2

a) La corrente che circola sulla spira piccola di raggio  $r_2$  si trova applicando le leggi di Kirchhoff e di Ohm al circuito in esame:  $I = I_s + I_R$  e  $RI_R = R_s I_s$ . Si ottiene  $I_s = IR/(R_s + R)$ . Il momento magnetico della spira piccola vale pertanto:

$$|\mathbf{m}| = \pi r_2^2 I_s = \frac{\pi r_2^2 R I}{R_s + R} \simeq 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ A m}^2$$

diretto lungo la normale  $\mathbf{n}_2$  alla spira.

b) Il campo di induzione magnetica generato dalla spira di raggio  $r_1$  al centro della seconda spira è diretto secondo la normale  $\mathbf{n}_1$  alla prima spira ed in modulo  $B = \mu_0 I/(2r_1)$ . Il momento delle forze agente sulla spira piccola vale pertanto

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{m} \wedge \mathbf{B}| = mB = \frac{\mu_0 \pi r_2^2 R I^2}{2r_1 (R_s + R)} \simeq 4.8 \cdot 10^{-11} \text{ N m} ,$$

essendo  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  perpendicolari.

c) La potenza dissipata sulla resistenza  $R$  è

$$P = RI_R^2 = \frac{R_s^2 R I^2}{(R_s + R)^2} , \simeq 9.8 \cdot 10^2 \text{ W} ,$$

essendo  $I_R = IR_s/(R_s + R)$ .

Per  $R \ll R_s$  si ottiene proporzionalità tra  $M$  e  $P$ :  $M/P = (\mu_0 \pi r_2^2)/(2r_1 R_s)$ .

### Soluzione Esercizio 3

a) Per  $x < l/\sqrt{2}$ , l'area  $S$  della spira nella regione con campo in funzione di  $x$  è  $S = x^2$ , per cui il flusso del campo  $\mathbf{B}$  è:  $\Phi(\mathbf{B}) = BS = Bx^2$ . La forza elettromotrice indotta è  $f = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$  e quindi la corrente indotta  $i = f/R$  è

$$i(x) = \frac{2Bvx}{R} ,$$

circolante in senso orario (legge di Lenz).

Per  $x > l/\sqrt{2}$ , l'area  $S$  è data dall'espressione  $S = l^2 - (\sqrt{2}l - x)^2$  e pertanto la corrente  $i$  è in tal caso

$$i(x) = \frac{2Bv(\sqrt{2}l - x)}{R}$$

sempre in senso orario.

b) La forza esterna deve bilanciare la forza magnetica sulla spira. Usando la seconda legge di Laplace per i tratti di circuito immersi nel campo si evince che l'unica componente non nulla è lungo  $x$ , pertanto si ha: per  $x < l/\sqrt{2}$

$$F(x) = \frac{4vB^2}{R}x^2$$

mentre per  $x > l/\sqrt{2}$

$$F(x) = \frac{4vB^2}{R}(\sqrt{2}l - x)^2$$

c) L'energia totale dissipata per effetto Joule quando la spira è per metà dentro la regione con campo è

$$W = \int_{t_0}^{t_1} dt R i^2 = \int_0^{l/\sqrt{2}} dx \frac{R i^2}{v} = \frac{4vB^2}{R} \int_0^{l/\sqrt{2}} dx x^2 = \frac{\sqrt{2}vB^2l^3}{3R} \simeq 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

### Soluzione Esercizio 4

a) Usando la forma integrale della IV equazione di Maxwell lungo circonferenze di raggio  $r$  coassiali alle armature del condensatore si ottiene ( $E(t) = V(t)/d$ ):

$$B(r, t) = \frac{\epsilon_0\mu_0V_0\omega}{2d} r \cos(\omega t) .$$

b) Dalla definizione di vettore di Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$  si ottiene

$$S(r, t) = \frac{\epsilon_0V_0^2\omega}{2d^2} r \sin(\omega t) \cos(\omega t) .$$

c) L'energia che fluisce attraverso la superficie che delimita il condensatore si ottiene integrando nel tempo da  $t = 0$  a  $t = T/4$  il flusso del vettore di Poynting:

$$W = \int_0^{T/4} dt 2\pi R d S(R, t) = \frac{\pi\epsilon_0V_0^2R^2}{2d} \simeq 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Tenendo conto dei versi dei campi nel primo quarto di periodo si evince che tale flusso di energia è entrante nel condensatore (si sta caricando).

d) Poichè il flusso del campo  $\mathbf{B}$  attraverso la superficie della spira è dato da:

$$\Phi(\mathbf{B}) = d' \int_0^R dr B(r) = \frac{\epsilon_0\mu_0d'V_0R^2\omega}{4d} \cos(\omega t) ,$$

si ottiene per la forza elettromotrice indotta

$$f = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\epsilon_0\mu_0d'V_0R^2\omega^2}{4d} \sin(\omega t) \quad , \quad f_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\epsilon_0\mu_0d'V_0R^2\omega^2}{4d} \simeq 3.9 \cdot 10^{-8} \text{ V}$$