Secondo compito di esonero del Corso di Elettromagnetismo A.A. 2004/2005

24 Giugno 2005

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

Esercizio 1

Una spira circolare di raggio r_1=20 cm è percorsa da una corrente i_1=1 A. Una seconda spira di raggio r_2=2 mm (sufficientemente piccolo da consentire l'approssimazione in cui $r_2 \ll r_1$) con centro sull'asse della prima spira e con piano parallelo ad essa, è percorsa da corrente i_2=2 A in verso opposto rispetto a i_1 ed è libera di muoversi lungo l'asse con moto traslatorio. Le correnti i_1 e i_2 nelle due spire sono mantenute costanti da opportuni generatori. Denotiamo con L_1 ed L_2 i coefficienti di autoinduzione delle due spire.
Determinare:

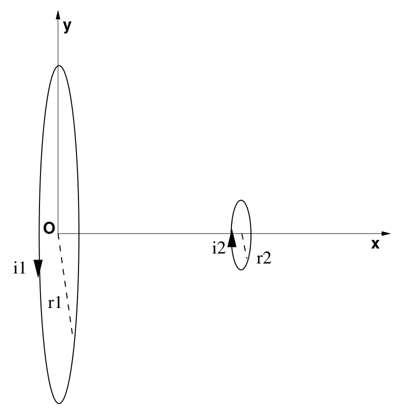
1) l'espressione del coefficiente di mutua induzione $\mathcal{M}$ tra le due spire in funzione della loro distanza;

2) l'espressione dell'energia magnetica U_m del sistema;

3) il valore della forza (specificando se attrattiva o repulsiva) tra le due spire quando la loro distanza è pari a $d = 4r_1/3$;

4) il lavoro necessario per portare la spira di raggio r_2 dall'infinito fino al centro della prima spira;

5) il valore di L_1 e L_2 sapendo che le due spire hanno la stessa resistenza R e che, quando si trovano a distanza infinita, l'energia del sistema vale $U_m(\infty)$=10^{-6} J ed inoltre che, in tale situazione di distanza infinita, se si staccano i generatori che mantengono la corrente costante, si osserva un decadimento esponenziale delle correnti con tempi di rilassamento τ_1 e τ_2 rispettivamente per le due spire, il cui rapporto vale τ_1/τ_2=250.



Esercizio 2

Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale di frequenza ν=30 GHz e ampiezza A=200 V/m, polarizzata linearmente con il campo elettrico diretto lungo l'asse y, si propaga lungo l'asse x, nella direzione delle x crescenti. Un solenoide costituito da un avvolgimento di N=200 spire quadrate di lato a uguale a metà della lunghezza d'onda λ e di resistenza trascurabile, ha lunghezza l=3 m ed è disposto parallelamente all'asse z.
Determinare:

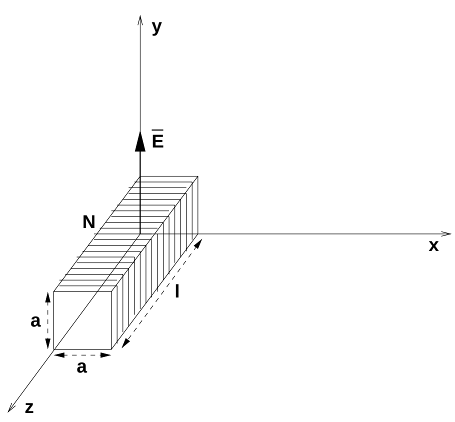
1) i valori della pulsazione ω, della lunghezza d'onda λ e dell'intensità media I della radiazione;

2) l'espressione della forza elettromotrice indotta nel solenoide;

3) l'equazione differenziale del circuito costituito dal solenoide chiuso su una resistenza R;

4) il valore dell'induttanza L del solenoide (usando l'approssimazione di solenoide indefinito);

5) i valori dell'ampiezza e della fase (rispetto alla forza elettromotrice indotta) della corrente circolante nel circuito nel caso in cui R=0.



Soluzione Esercizio 1

Sia l'asse x con centro sulla prima spira e diretto lungo la congiungente i centri delle due spire.

1) Data la geometria del sistema, per il calcolo del coefficiente di mutua induzione $\mathcal{M}$ conviene usare l'espressione $\mathcal{M} = \phi(\mathbf{B})/i_1$, dove ϕ è il flusso attraverso la seconda spira del campo $\mathbf{B}$ generato dalla prima spira. Essendo $r_2 \ll r_1$ possiamo infatti considerare costante il campo $\mathbf{B}$ sulla seconda spira: $\phi(\mathbf{B}) = \pi r_2^2 B$. Il campo $\mathbf{B}$ è quello generato sull'asse da una spira circolare, il cui modulo è $B = (1/2)\mu_0 r_1^2 i_1 (r_1^2 + x^2)^{-3/2}$. Si ha pertanto

$$\mathcal{M}(x) = \frac{\pi \mu_0 r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + x^2)^{3/2}} \ .$$

2) L'espressione dell'energia magnetica è data dalla somma dei termini di autoenergia (proporzionali a $L_{1,2}$) e del termine di muta energia(proprzionale a $\mathcal{M}$):

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - \mathcal{M} i_1 i_2$$

dove si è tenuto conto del segno delle correnti (circolanti in verso opposto).

3) Essendo le correnti mantenute costanti, la forza tra i due circuiti è data dalla derivata rispetto ad x dell'energia magnetica con il segno positivo, ed, essendo dipendente da x il solo termine di mutua interazione, si ottiene:

$$F(x) = +\frac{dU_m}{dx} = -i_1 i_2 \frac{d\mathcal{M}}{dx} = \frac{3 i_1 i_2 \pi \mu_0 r_1^2 r_2^2}{2} \frac{x}{(r_1^2 + x^2)^{5/2}} \ ,$$

con segno positivo (forza repulsiva). Alla distanza $x = d = 4r_1/3$ si ottiene il valore

$$F(x) \simeq 1.23 \cdot 10^{-10} \ \text{N} \ .$$

4) Il lavoro $\mathcal{L}$ per portare la seconda spira dall'infinito ad $x = 0$ è

$$\mathcal{L} = U_m(\infty) - U_m(0) = i_1 i_2 \mathcal{M}(0) = \frac{i_1 i_2 \pi \mu_0 r_2^2}{2 r_1} \simeq 7.9 \cdot 10^{-11} \ \text{J} \ .$$

5) Per trovare L_1 e L_2 devo risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (1/2) L_1 i_1^2 + 1/2 L_2 i_2^2 = U_m(\infty) \\ L_1/L_2 = \tau_1/\tau_2 \end{cases}$$

dove la prima è l'energia magnetica del sistema per distanza infinita tra le spire e la seconda si ricava dal fatto che, una volta staccato il generatore, la spira si comporta come un ricuito RL con costante di decadimento $\tau = L/R$ (ed essendo uguali le resistenze delle due spire si ottiene la relazione di cui sopra). Risolvendo il sistema si ha:

$$L_1 = \frac{2 U_m(\infty)}{i_1^2 + (\tau_2/\tau_1) i_2^2} \simeq 1.97 \cdot 10^{-6} \ \text{H}$$
$$L_2 = \frac{2 U_m(\infty)}{(\tau_1/\tau_2) i_1^2 + i_2^2} \simeq 7.87 \cdot 10^{-9} \ \text{H}$$

Soluzione Esercizio 2

1) La pulsazione ω e la lunghezza d'onda λ valgono:

$$\begin{aligned} \omega = &\quad 2\pi\nu \;\simeq\; 1.88 \cdot 10^{11}\ \text{rad/s} \\ \lambda = &\quad c/\nu \;\simeq\; 1.0\ \text{cm} \end{aligned}$$

L'intensità media dell'onda è:

$$I = \frac{A^2}{2Z_0} = \frac{A^2}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \;\simeq\; 53\ \text{W/m}^2$$

2) I campi **E** e **B** sono :

$$\begin{cases} E_y = A\ \sin(kx - \omega t) \\ B_z = (A/c)\ \sin(kx - \omega t) \end{cases}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $E/B{=}c$. Il flusso del campo **B** attraverso il solenoide è dato da N volte il flusso attraverso la sezione quadrata del solenoide, ed essendo **B** ortogonale a tale sezione si ha:

$$\phi(\mathbf{B}) = Na\int_0^a dx\ B_z = \frac{NA\lambda}{\omega}\cos(\omega t)$$

avendo tenuto conto del fatto che $a{=}\lambda/2$ e quindi $ka{=}\pi$. Per la forza elettromotrice indotta si ottiene quindi l'espressione:

$$f_i = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} = NA\lambda\sin(\omega t)\ .$$

3) Trattando il problema nell'approssimazione di quasi-stazionarietà (anche se non completamente giustificata per i dati proposti), l'equazione del circuito si scrive

$$f_i - L\frac{dI}{dt} = RI\ .$$

4) L'induttanza del solenoide è, nell'approssimazione di solenoide indefinito:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{l} = \frac{\mu_0 N^2\lambda^2}{4l} \;\simeq\; 4.19 \cdot 10^{-7}\ \text{H}\ .$$

5) L'equazione da risolvere è in questo caso $f_i - LdI/dt = 0$, che ha come soluzione

$$I(t) = -\frac{NA\lambda}{L\omega}\cos(\omega t) = I_0\sin(\omega t + \varphi)\ ,$$

con

$$\begin{aligned} &I_0 = (NA\lambda)/(L\omega) \;\simeq\; 5.07 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \\ &\varphi = -\pi/2 \end{aligned}$$