Corso di Elettromagnetismo: Esercitazione in Aula del 11-04-2008

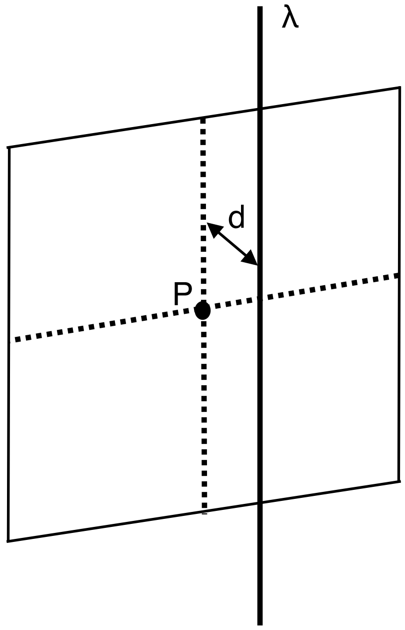
F.Lacava, F.Ricci, D.Trevese

Problema 1:

Un filo sottile rettilineo di sezione trascurabile e' tenuto parallelo ad un piano metallico e ad una distanza d=6cm da esso. Si assuma d << della lunghezza del filo e delle dimensioni lineari del piano. Il piano e' connesso tramite un filo sottile di capacita' trascurabile alla terra (V=0), mentre il filo e' carico con una densita' lineare di carica $\lambda=1.7\ 10^{-7}$ C/m.

Calcolare:

1. il campo elettrico (modulo direzione e verso) in uno dei punti (ad esempio il punto P in figura) del piano che si trovano a distanza d dal filo;
2. la forza per unita' di lunghezza con la quale il filo e' attirato dal piano.



Problema 2:

Un condensatore cilindrico a vuoto di capacita C= 200 pF, di raggio dell'armatura interna r_1=15mm e raggio interno dell'armatura esterna r_2= 20mm e' carico con una carica Q=0.1μC.

In queste condizioni il condensatore viene immerso in un bagno di olio minerale e si osserva una diminuzione della differenza di potenziale ai suoi capi di 200 V.

Dedurre:

3. la costante dielettrica dell'olio minerale;
4. la quantita di carica di polarizzazione (domanda facoltativa)

Soluzione problema 1:

1- Il campo elettrostatico **E** puo' essere facilmente calcolato usando il metodo della carica immagine. Data la simmetria el sistema e' necessario introdurre un filo immagine di densita' di carica opposta a quella del filo reale, posto simmetricamente rispetto al piano metallico.
Il campo elttrostatico prodotto da una distribuzione filiforme indefinita di carica di densita' lineare λ puo' essere facilmente calcolato applicando il teorema di Gauss:

$$\overrightarrow{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r} \qquad \text{radiale}$$

Il campo elettrostatico totale nel punto P sara' quindi dato per il principio di sovrapposizione dalla somma dei campi elettrci generati dal filo reale e dal filo immagine, entrambi ad una distanza d dal punto P stesso:

$$E(P) = E_\lambda(P) + E_{-\lambda}(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{d} + \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{d} = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{d} = 1 \cdot 10^5 \ V/m$$

diretto ortogonalmente al piano in verso entrante.

2 - La forza a cui e' soggetto il filo da parte del piano e' calcolabile a partire dal campo elettrico che il filo immagine produce nella posizione del filo reale (quindi a distanza 2d dal primo). Considerando un tratto elementare di filo di lunghezza dl avremo:

$$d\overrightarrow{F} = dq\overrightarrow{E}_{filo\ immagine} = \lambda dl\overrightarrow{E}_{filo\ immagine}$$

da cui:

$$\frac{d\overrightarrow{F}}{dl} = \lambda\overrightarrow{E}_{filo\ immagine} = \lambda\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{2d} = 4.3 \cdot 10^{-3} \ N/m$$

attrattiva.

Soluzione problema 2:

3 - dopo l'immersione la capacita' del condensatore aumenta di un fattore ε_r: $C = \varepsilon_r C_0$, per cui avremo:

$$\epsilon_r = C/C_0 = \frac{Q}{VC_0} = \frac{Q_0}{V_0 + \Delta V}\frac{1}{C_0}$$

in cui abbiamo indicato con il pedice "0" le grandezze prima dell'immersione nel bagno d'olio, e con ΔV=-200 V la variazione di energia potenziale tra le armature del condesatore prima e dopo l'immersione.
Risulta inoltre: $V_0 = Q_0/C_0 =$ 0.1 10^{-6} C / 200 10^{-12} F = 500 V, da cui:

$$\epsilon_r = \frac{0.1 \cdot 10^{-6}\ C}{300\ V\ 200 \cdot 10^{-12}\ F} = 1.7$$

4 - il dielettrico e' omogeneo, per cui avremo: $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, con **P** vettore di polarizzazione elettrica.
Esprimendo il vettore di polarizzazione elettrica in funzione della densita' superficiale di carica sulle due armature avremo:

$$\sigma_p = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \overrightarrow{E} \cdot \hat{n} = \pm(\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \overrightarrow{E} = \pm\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}\epsilon_0 \overrightarrow{E}_0 = \pm\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}\sigma_0$$

da cui:

$$Q_p = \sigma_p \cdot \Sigma = \pm\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}\sigma_0 \cdot \Sigma = \pm\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r}Q_0 = 0.04\ \mu C$$