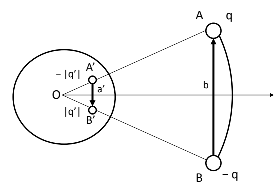
Elettromagnetismo a.a. 2009/2010

prova scritta del 5 Luglio 2010

(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,2,3 tempo 3 h e 30 min;
Elettromagnetismo 5 crediti: esercizio 2,3 tempo 2 h e 20 min;
Elettricitá e Magnetismo 5 crediti: esercizi 1,2, tempo 2 h, 20 min;
Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti, tempo 1h e 20 min.



Esercizio 1

Un dipolo elettrico di momento $\vec{\mathbf{p}} \equiv (qd, 0, 0)$ si trova a distanza b lungo l'asse z dal centro di una sfera conduttrice di raggio R, centrata nell'origine e messa a terra. (vedi figura).

Ricordando che il metodo della carica immagine, nel caso di una sfera conduttrice di raggio R, associa ad una carica q, posta a distanza $b > R$ dal centro, una carica immagine $q' = -\frac{R}{b}q$ a distanza $a' = \frac{R^2}{b}$ dal centro ,

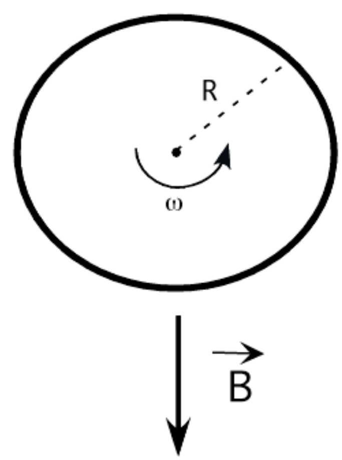
a) si ricavi il momento di dipolo $\vec{\mathbf{p}}'$, immagine del dipolo $\vec{\mathbf{p}}$

b) si determini il potenziale in tutto lo spazio, in funzione delle coordinate x, y, z, e si commenti in particolare l'andamento nel piano $x = 0$,

c) si ricavi l'andamento del campo elettrico lungo l'asse z e si discuta il valore per $z = R$.

Dati: $q = 10^{-6}$ C, d= 5.0 mm, R= 20 cm, b= 1.2 m

Esercizio 2



Un disco di raggio R ruota con una frequenza costante ν attorno ad un asse fisso ad esso perpendicolare e passante per il suo centro O. Sul disco è distribuita uniformemente una carica q. Si calcoli:

a) l'intensità del campo di induzione magnetica $\vec{\mathbf{B}}$ in un punto P situato sull'asse e distante d da O;

b) il momento magnetico complessivo del disco,

c) il momento risultante delle reazioni vincolari necessarie per mantenere fisso l'asse di rotazione se in disco è immerso in un campo magnetico uniforme di induzione $\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{ext}}$ ortogonale all'asse di rotazione.

Dati: ν= 1.0 kHz, q= 10.0 μC, R= 20.0 cm, d=30.0 cm, $|\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{ext}}|$=1.2 T.

Esercizio 3

Un solenoide di lunghezza l= 0.5 m è composto da N=1000 spire di raggio a=10.0 cm. Un cilindro ferromagnetico di permeabilità magnetica relativa μ_r=1000, raggio b=5.0 cm e lunghezza l è completamente inserito all'interno del solenoide coassialmente ad esso. Il solenoide è collegato in serie a una resistenza $R = 5\ \Omega$ e un generatore di tensione continua V=10 V. Il circuito viene chiuso all'istante $t = 0$. Calcolare:

a) l'induttanza L del solenoide,

b) il campo elettrico in modulo e direzione in un punto a distanza b dall'asse del solenoide all'istante $t^* = 5$ s,

c) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del cilindro ferromagnetico all'istante t^*.

Soluzioni della prova scritta

(Proff. F. Lacava, D. Trevese, M. Virasoro)

Esercizio 1

a) Facendo riferimento alla figura, dalla similitudine dei triangoli ABO e A'B'O $\frac{d}{b} = \frac{d'}{a'}$, dove $a' = \frac{R^2}{b}$. Per cui si ottiene: $d' = d\frac{R^2}{b^2}$.
Pertanto il dipolo $\vec{p'}$, avente direzione opposta a $\vec{p}$, ha modulo:
$p' = q'd' = qd\frac{R^3}{b^3} = 2.3 \cdot 10^{-11} Cm$

b) Il potenziale dovuto ai due dipoli risulta:
$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{px}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{p'x}{[x^2+y^+(z-a')^2]^{3/2}}\}$,

fuori dalla sfera conduttrice, mentre si ha $V(x,y,z) = 0$ sulla superficie e all'interno della sfera.

Per $x = 0$ $V(x,y,z) = 0$, cioe' il iano y,z è equipotenziale all sfera, coerentemente con la nota simmetria del campo dipolare e con il prencipio di sovrapposizione applicato al campo dei due dipoli paralleli..

c) Per le tre componenti del campo elettrico si ha:
$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} =$
$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{-3px^2}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}} - \frac{p'}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} + \frac{3p'x^2}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\}$

$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{-3pxy}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{5/2}} - \frac{-3p'xy}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{5/2}}\}$

$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{-3px(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{5/2}} - \frac{-3p'x(z-a')}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{5/2}}\}$

Per $x = y = 0$ si ha $E_y = E_z = 0$ mentre
$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{(z-b)^3} - \frac{p'}{(z-a)^3}\}$.

Per $z = R$ si ottiene:

$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{(R-b)^3} - \frac{p'}{(R-a)^3}\} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\{\frac{p}{(R-b)^3} + \frac{p\frac{R^3}{b^3}}{(R-\frac{R^2}{b})^3}\} = 0.$

Per $R = z$ il campo è nullo. Infatti la componente E_z è nulla poiche' l'asse z (il piano y,z) è equipotenziale, mentre le componenti tangenti alla sfera risultano anch'esse nulle per il teorema di Coulomb (conformemente al risultato analitico precedente).

Esercizio 2

a) La densità superficiale di carica é $\sigma = q/\pi R^2$. La carica é in moto circolare uniforme con frequenza ν, cosí che se consideriamo una corona circolare di raggio r e spessore dr questa corrisponde ad una corrente infinitesima pari a

$$di = \frac{q2\pi\nu r}{\pi R^2} dr$$

Il campo di induzione magnetica $\vec{B}$ é quindi ottenibile come sovrapposizione dei contributi delle spire circolare percorse dalla corrente infinitesima di il cui inviluppo ricopre tutto i disco.

Ciascuna delle spire contribuisce al campo lungo l'asse z con un termine pari a

$$dB = \frac{\mu_o q\nu}{R^2} \frac{r^2}{(z^2+r^2)^{3/2}} r dr$$

dove B e' il valore del campo diretto come l'asse z. Integrando tra 0 ed R si ottiene:

$$B = \frac{\mu_o q\nu}{R^2} \int_0^R \left(\frac{r^2+z^2}{(z^2+r^2)^{3/2}} - \frac{z^2}{(z^2+r^2)^{3/2}}\right) r dr$$

$$B = \frac{\mu_o q\nu}{R^2} \left[\frac{r^2}{(2z^2+r^2)^{1/2}} - 2z\right]$$

ed otteniamo $B(z = \text{`}cm) = 3.20 \cdot 10^{-9}\ T$

b) Il momento di dipolo $\vec{m}$ si ricava applicando il teorema d'equivalenza d'Ampere . Esso é diretto come l'asse z ed é otttenuto integrando tra $p0$ e R i contributi di tutte le spire infinitesime di corrente di:

$$m = \int_o^R \pi r^2 di = \frac{q2\pi\nu}{R^2} \int_o^R r^3 dr = \frac{q\pi\nu}{2} R^2 = 6.28 \cdot 10^{-4} \quad Am^2$$

c) Il momento delle forze vincolari $\vec{M}_R$ é uguale ed opposto a quello dovuto alle forze magnetiche

$$\vec{M}_R = -\vec{M} = -\vec{m} \times \vec{B}_{ext}$$

Da cui deduciamo che

$$M_x = M_z = 0$$

e

$$M_{Ry} = -M_y = -\frac{q\pi\nu}{2} R^2 B_{ext} = -7.54 \cdot 10^{-4}\ Nm$$

Esercizio 3

a)

$$H_z = NI/l$$

$$B_z = \begin{cases} \mu_0 \mu_r H_z & 0 < r < b \\ \mu_0 H_z & b < r < a \end{cases}$$

$$\Phi(B) = N[\mu_0 H_z \pi (a^2 - b^2) + \mu_0 \mu_r H_z \pi b^2] = N \mu_0 H_z \pi [a^2 + b^2(\mu_r - 1)]$$

$$L = \Phi(B)/I = \frac{\mu_0 \pi N^2}{l}[a^2 + b^2(\mu_r - 1)] = 19.8 \quad H$$

b)

$$V - L\dot{I} = RI$$

$$I = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \tau = L/R = 3,96 \quad s$$

$$2\pi b E_\phi = -\mu_0 \mu_r N \dot{I} \pi b^2 / l$$

$$E_\phi = -\frac{\mu_0 \mu_r N \dot{I} b}{2l} = -\frac{\mu_0 \mu_r N V b e^{-t^*/\tau}}{2lL} = 8.98 \cdot 10^{-3} \;\; V/m \qquad E_r = 0, \quad E_z = 0$$

c)

$$S_r = -E_\phi H_z$$

$$\Phi(S) = S_r 2\pi b l = 4.05 \quad W$$