Prova scritta di Elettromagnetismo - a.a. 2012/2013

Sessione estiva - II appello - 15 luglio 2013

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Esercizio 1

Due condensatori C_1 e C_2 sono collegati in parallelo. Il secondo condensatore ha capacità $C_2 = 1 \cdot 10^{-9}\ F$, il primo è un condensatore piano a vuoto, con armature di superficie $S = 600\ cm^2$, poste a distanza $h = 3\ mm$. Inizialmente il sistema dei due condensatori è caricato con un generatore di forza elettromotrice costante $V_0 = 400\ V$ posto in parallelo a C_1 e C_2. Successivamente il generatore viene staccato e lo spazio tra le armature del condensatore C_1 viene riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 80$. Si calcoli:

a) la variazione di carica nel condensatore C_1;

b) la variazione di potenziale ai capi di C_2;

c) il lavoro delle forze del campo nel processo di riempimento.

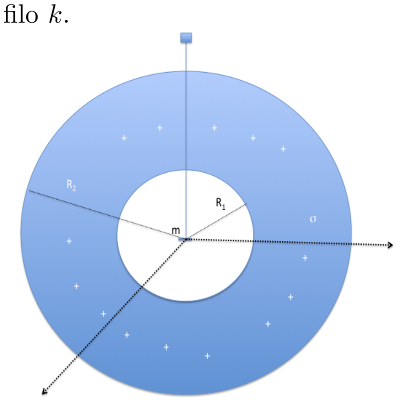
Esercizio 2

Un ago magnetico di dimensioni trascurabili, di momento magnetico $m = 0.8\ Am^2$ è appeso ad un filo e può ruotare sul piano orizzontale. Il momento meccanico delle forze di torsione del filo è $\mathcal{M} = -k\alpha$.

Un disco di spessore trascurabile, di raggio $R_2 = 30\ cm$, avente un foro circolare concentrico di raggio $R_1 = 20\ cm$, è uniformemente carico con una densità superficiale pari a $\sigma = 1 \cdot 10^{-2}\ C/m^2$. Il disco giace sul piano verticale identificato dall'ago nella sua posizione d'equilibrio e dal filo che lo sospende. Il centro del disco e quello dell'ago sono pressocchè coincidenti. Se il disco ruota nel piano verticale attorno al suo asse di simmetria, con velocità angolare $\omega = 800\ rad/s$, l'ago ruota di $\alpha^* = 0.2\ rad$ nel piano orizzontale. Si calcoli:

a) il campo di induzione magnetica nel centro del disco generato dal suo moto di rotazione,

b) il valore della costante di torsione del filo k.



Esercizio 3

Un anello di vetro, di resistività $\rho_v = 10^{10}\Omega m$, raggio interno $a = 2$ cm e sezione quadrata di lato a, è immerso in un campo magnetico parallelo al suo asse, con intensità uniforme, variabile sinusoidalmente nel tempo alla frequenza di $\nu = 30\ kHz$ e di intensità massima $B_M = 0.1\ T$.

Trascurando il campo magnetico autoindotto, si calcoli:

a) la potenza media dissipata per effetto Joule all'interno dell'anello,

b) quanto cambia la potenza dissipata costruendo l'anello di silicio ($\rho_{Si} = 2.5 \cdot 10^3\Omega m$),

c) le espressioni del vettore di Poynting sulle due facce dell'anello parallele al campo $\vec{B}$.

Soluzioni

Esercizio 1

a)
La capacità di C_1 è

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{h} = 1.77 \cdot 10^{-10}\ F$$

Le cariche prima del riempimento sono

$$Q_1 = C_1 V_0 = 7.1 \cdot 10^{-8}\ C \qquad\qquad Q_2 = C_2 V_0 = 4.0 \cdot 10^{-7}\ C$$

e la carica totale è

$$Q_{tot} = (C_1 + C_2) V_0 = Q_1 + Q_2 = 4.7 \cdot 10^{-7}\ C$$

Dopo il riempimento è cambiata la capacità di C_1:

$$C_1{}' = \epsilon_r C_1 = 1.4 \cdot 10^{-8}\ F$$

Poichè il processo di riempimento avviene a carica costante avremo:

$$Q'_{tot} = Q_1{}' + Q_2{}' = (C_1{}' + C_2) V' = Q_{tot}$$

dalla quale:

$$V' = \frac{C_1 + C_2}{C_1{}' + C_2} V_0$$

e

$$Q_1{}' = C_1{}' V'$$

$$Q_1{}' = 4.4 \cdot 10^{-7}\ C \qquad Q_2{}' = 3.1 \cdot 10^{-8}\ C \qquad V' = 31\ V$$

Ne segue che la variazione di carica nel primo condensatore è

$$\Delta Q_1 = Q_1{}' - Q_1 = 3.7 \cdot 10^{-7}\ \ C$$

b)
La variazione di tensione sui condensatori in parallelo è:

$$\Delta V_2 = \Delta V_1 = V' - V_0 = -369\ V$$

c)
Il lavoro delle forze del campo è fatto a spese della energia elettrostatica del sistema di condensatori isolati:

$$L = -\Delta U = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V_0{}^2 - \frac{1}{2}(C_1{}' + C_2) V'^2 = \frac{1}{2} Q_{tot}^2 \left(\frac{1}{C_1 + C_2} - \frac{1}{C_1' + C_2} \right) = 8.7 \cdot 10^{-5}\ \ J$$

Esercizio 2

a)
Il campo di induzione magnetica è calcolabile considerando il disco carico in rotazione con un pariodo $T = 2\pi/\omega$ come tante spire concentriche di raggio r e larghezza dr percorse da una corrente di pari a

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\omega\sigma r dr d\phi}{2\pi} \qquad .$$

Poichè il campo d'induzione magnetica al centro di una spira è

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{di}{r}$$

deduciamo che il campo totale dovuto al disco sarà

$$B(r=0) = \frac{\mu_0}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\omega\sigma}{2\pi} dr = \frac{\mu_0}{2}\omega\sigma(R_2 - R_1) = 5.0 \cdot 10^{-7}$$

b)
Ne segue che all'equilibrio

$$k\alpha^* = m\ B\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha^*) = m\frac{\mu_0}{2}\omega\sigma(R_2 - R_1)\cos\alpha^*$$

da cui deduciamo

$$k = \frac{m}{\alpha^*}\frac{\mu_0}{2}\omega\sigma(R_2 - R_1)\cos\alpha^* = 1.96 \cdot 10^{-6} \quad N\ m/rad$$

Esercizio 3

a)
Esplicitiamo l'andamento del campo di induzione magnetica in funzione del tempo. Detto z l'asse perpendicolare al piano dell'anello, l'unica componente del campo diversa da zero è:

$$B_z = B_M \cos(\omega t)$$

essendo $\omega = 2\pi\nu$ la pulsazione e ν la frequenza.
Integriamo l'equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

su una superficie che ha per bordo un cammino circolare di raggio r posto all'interno dell'anello di vetro. Applicando poi il teorema di Stokes apparirà al primo membro la circuitazione del campo elettrico lungo il cammino circolare:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS$$

Viste le condizioni di simmetria del problema, il campo elettrico è diretto come il versore tangente alla circonferenza di raggio r ed il suo modulo è costante in tutti i punti del cammino. Inolte la derivata del campo $\vec{B}$ non dipende dalle coordinate spaziali dei punti della superficie S. Quindi abbiamo che

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS = \omega B_M \sin(\omega t) \pi r^2$$

Se ne deduce che

$$E(r) = \frac{\omega B_M}{2} r \sin(\omega t)$$

Detta $\vec{J}$ la densità di corrente che scorre nell'anello di vetro, la potenza dissipata per unità di volume mediata su un periodo $T = (2\pi/\omega)$ è:

$$w_v = < \vec{E} \cdot \vec{J} >$$

Applicando la legge di Ohm $\vec{E} = \rho \vec{J}$ si ha

$$w_v = < \frac{E^2}{\rho_v} > = < \frac{\omega^2 B_M^2}{4\rho_v} r^2 \sin^2(\omega t) > = \frac{\omega^2 B_M^2}{8\rho_v} r^2$$

La potenza totale dissipata è ottenuta integrando sul volume dell'anello

$$W_v = \int_\tau w d\tau = 2\pi a \int_a^{2a} \frac{\omega^2 B_M^2}{8\rho_v} r^3 dr = \frac{15}{16\rho_v} \pi a^5 \omega^2 B_M^2 = \frac{15}{4\rho_v} \pi^3 a^5 \nu^2 B_M^2 = 3.48 \cdot 10^{-10} W$$

b)
Nel caso di un anello di rame si ha

$$W_{Si} = \frac{\rho_v}{\rho_{Si}} W_v = 4 \cdot 10^6 W_v = 1.4 \cdot mW$$

c)
Per definizione il vettore di Poynting è

$$\vec{I} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Il contributo al campo $\vec{H}_{tot}$ dovuto dovuto all'autoinduzione (ovvero dovuto alla densità di corrente $\vec{J}$ e al campo $\vec{E}$ variabile nel tempo) è trascurabile, allora si ha $\vec{H}_{tot} \simeq \vec{B}/\mu_o$, che è perpendicolare ad $\vec{E}$. Ne segue che il vettore di Poynting ha diversa da zero la sola componente radiale, ovvero è perpendicolare alle facce laterali dell'anello e giace su piani perpendicolari al campo magnetico. Le espressoni del vettore lungo le due facce parallele a $\vec{B}$ sono

$$I(a) = \frac{\pi \nu {B_M}^2}{\mu_0} a \sin(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu t)$$

$$I(2a) = \frac{2\pi \nu {B_M}^2}{\mu_0} a \sin(2\pi\nu t) \cos(2\pi\nu t)$$