Prova scritta di Elettromagnetismo

04 febbraio 2014 - a.a. 2013/2014

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

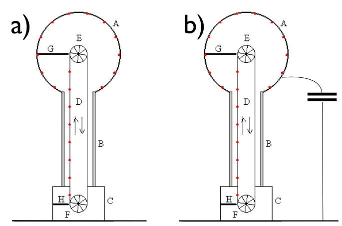
Esercizio 1

Un generatore elettrostatico di van De Graaff è costituito da una sfera conduttrice di raggio $R = 1.5\ m$ montata su di una colonna isolante. Esso è contenuto nelle zona centrale di un ambiente di dimensioni molto maggiori del raggio R e viene caricato finchè, quando il campo in prossimità della superficie della sfera raggiunge il valore $E_a = 3\ MV\ m^{-1}$, si innesca una scarica elettrica.

a) Si calcolino la carica elettrica massima Q_M depositata sulla sfera e il potenziale della sfera subito prima che scocchi la scarica.

Se durante il processo di carica la sfera è connessa, tramite un sottile filo conduttore, ad un condensatore con armature piane e parallele di area $A = 0.2\ m^2$ e distanti $d = 3\ mm$, riempito di silicone, di rigidità dielettrica ${E_S}^{max} = 12\ MVm^{-1}$ e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$:

b) si determinino il massimo valore del potenziale della sfera e la carica massima totale Q'_M depositata sulla sfera e sulle due armature del condensatore prima che scocchi una scarica o nell'ambiente o nel condensatore.



Esercizio 2

Un circuito magnetico è costituito da un nucleo di materiale ferromagnetico ($\mu_r = 3000$) di lunghezza media $l = 1.0\ m$ e sezione costante $\Sigma = 5.0\ cm^2$, e da un traferro di spessore $d = 5.0\ mm$ e di pari sezione Σ. Quest'ultimo è interamente riempito da un materiale per cui vale la relazione tra campo magnetico e campo d'induzione magnetica:

$$\vec{B_{tr}} = \mu_0(\mu' + \mu''|\vec{H_{tr}}|)\vec{H_{tr}}$$

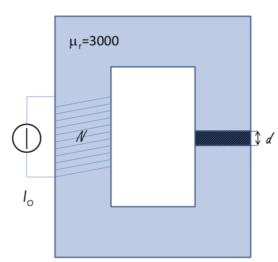
con $\mu' = 1$ e $\mu'' = 0.015\ mA^{-1}$.

Un generatore di corrente è collegato al circuito tramite un avvolgimento di $N = 20$ spire. Nell'avvolgimento scorre la corrente continua $I_o = 0.10\ A$. Si chiede di calcolare

a) il modulo del campo $\vec{H_{tr}}$ nel traferro.

b) il flusso magnetico totale concatenato con l'avvolgimento eccitatore.

c) il valore dell'energia magnetica immagazzinata nel circuito.



Esercizio 3

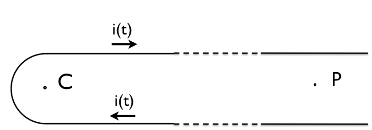
Un filo conduttore ha la forma indicata in figura, in cui la distanza $d = 50\ cm$ fra i dui fili paralleli corrisponde al diametro della circonferenza che li raccorda. La lunghezza del conduttore è $L >> d$. Una piccola spira circolare di raggio di raggio $r = 2\ mm$, costituita da un filo di rame (resistività $\rho = 1.7\ 10^{-8}\Omega m$) di sezione $s = 5\ 10^{-3}mm^2$, complanare al filo, può essere posta nel centro C della semicirconferenza, oppure in un punto P del piano equidistante dai due fili e a distanza molto grande dalla semicirconferenza. Il filo conduttore è percorso da una corrente alternata alla frequenza $\nu = 50$ Hz di intensità massima $I_M = 20$ A.

Si calcoli:

a) l'espressione del campo magnetico, in modulo e direzione, nel centro C della semicirconferenza e nel punto P;

b) il coefficiente di mutua induzione fra la spira e il filo quando essa è posta in C oppure in P;

c) la potenza media dissipata nella spira per effetto Joule nei due casi.



Soluzioni

Esercizio 1

a)
Il campo in prossimità della superficie della sfera è:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_s}{R^2}$$

Il potenziale della sfera è:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q_s}{R}$$

Ne consegue che

$$\frac{V}{E} = R$$

Quando $E = E_a$, risulta

$$V_{Max,S} = RE_a = 1.5m \times 3 \times 10^6 Vm^{-1} = 4.5MV$$

La carica massima sulla sfera è

$$Q_S = C_S V_{a,S} = 4\pi\epsilon_o R V_{a,S} = 4\pi\epsilon_o R^2 E_a = 750\ \mu C$$

b)
La sfera e una delle armature del condensatore sono allo stesso potenziale, $V = V_S = V_C$. Inoltre le relazioni fra campo e potenziale, nel condensatore e sulla superficie della sfera sono rispettivamente:

$$E_C = \frac{V_C}{d} \qquad E_S = \frac{V_S}{R}$$

Pertanto, al variare del potenziale comune $V = V_S = V_C$, si avrà:

$$\frac{E_C}{E_S} = \frac{1}{E_S d}V = \frac{R}{d} = 500$$

Confrontando E_a con la rigidità dielettrica del silicone ${E_S}^{max}$

si ha

$$\frac{E_a}{{E_S}^{max}} = 4$$

Ne consegue che la scarica si avrà prima nel **condensatore**.

La scarica si innesca quando

$$V = d{E_S}^{max} = 3 \times 10^{-3} m \times 12 \times 10^6 Vm^{-1} = 36\ kV$$

In queste condizioni la carica sulla sfera è:

$$Q_S = C_S V = 4\pi\epsilon_o RV = 6.0\ \mu C$$

Le cariche sulle armature del condensatore sono

$$Q^+ = CV = \epsilon_o \epsilon_r \frac{A}{d} V = 64 \times 10^{-6}\ C$$
$$Q^- = -64 \times 10^{-6}\ C$$

Esercizio 2

a) Dal teorema della circuitazione di Ampère discende che:

$$Hl + H_{tr} d = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} l + H_{tr} d = N I_0$$

in cui abbiamo indicato con H, B i campi all'interno del nucleo ferromagnetico e H_{tr}, B_{tr} i campi nel traferro. Il campo d'induzione magnetica è perpendicolare alla superficie di separazione dei due mezzi. Pertanto, trascurando effetti legati al flusso disperso e dalla conservazione delle componenti normali del campo$\vec{B}$, segue che $B = B_{tr}$. Inoltre, facendo uso della relazione tra $\vec{B_{tr}}$ e $\vec{H_{tr}}$, si ottiene:

$$\frac{(\mu' + \mu'' H_{tr})\, H_{tr}}{\mu_r} l + H_{tr} d = N I_0$$

Si ha dunque un'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono:

$$H_{tr} = \frac{-\left(\mu' l + \mu_r d\right) \pm \sqrt{\left(\mu' l + \mu_r d\right)^2 + 4 N I_0 \mu'' \mu_r l}}{2 \mu'' l}$$

Di queste, poiché la relazione tra $\vec{B_{tr}}$ e $\vec{H_{tr}}$ indica che i due vettori sono paralleli e concordi, la soluzione di interesse è quella positiva (corrispondente alla scelta del segno +). Il valore numerico richiesto è

$$H_{tr} = 294\ A/m$$

b) Trascurando il flusso disperso di $\vec{B}$, quello concatenato con il circuito eccitatore Φ vale:

$$\Phi = N \Sigma B = N \Sigma B_{tr} = N \Sigma \mu_0 \left(\mu' + \mu'' H_{tr}\right) H_{tr} = 2.0 \cdot 10^{-5}\ Wb$$

c) L'energia magnetica totale si ottiene integrando la densità di energia nel materiale ferromagnetico e nel traferro. Poiché, nell'approssimazione di circuito magnetico, i campi sono uniformi all'interno di ciascun materiale, occorre semplicemente moltiplicare le due densità di energia per i rispettivi volumi:

$$U_m = \frac{1}{2} BH \cdot \Sigma l + \frac{1}{2} B_{tr} H_{tr} \cdot \Sigma d = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r} \Sigma l + \frac{1}{2} B_{tr} H_{tr} \Sigma d$$

Ricordando ancora una volta che $B = B_{tr}$ e utilizzando la relazione tra B_{tr} e H_{tr} si ottiene infine:

$$U_m = \frac{1}{2} \Sigma \mu_0 \left(\mu' + \mu'' H_{tr}\right) H_{tr}^2 \left(\frac{\mu' + \mu'' H_{tr}}{\mu_r} l + d\right) = 1.0 \cdot 10^{-6}\ J$$

Esercizio 3

a) Il filo conduttore è composto da tre elementi separati: 2 semirette e una semicirconferenza. Il campo in C è la somma del campo generato dai tre elementi considerati separatamente. Assumiamo inoltre che la corrente vari con legge $I(t) = I_m \cos(2\pi\nu t))$. Avremo quindi:

- Il contributo nel punto C dovuto alle due semirette distanti d l'una dall'altra. Questo è pari alla somma dei contributi di due fili distanti $d/2$ da C. Ne segue:
$$B = \frac{\mu_0}{\pi d} I(t) \tag{1}$$
- Il contributo della semicirconferenza è pari a metà del campo generato da una spira circolare nel suo centro:
$$B = \frac{\mu_0}{2d} I(t) \tag{2}$$

Il campo in C, somma dei due contributi, è quindi:

$$B_T^C = \frac{\mu_0}{2d} \left(\frac{2}{\pi} + 1\right) I(t) \tag{3}$$

Essendo P a grande distanza dal semicirconferenza, il campo in quel punto è la somma dovuta a 2 rette poste a distanza $d/2$:

$$B_T^P = \frac{2\mu_0}{\pi d} I(t) \tag{4}$$

La direzione del campo è perpendicolare al piano contenente il filo, il verso cambia al variare della corrente.

b) Il coefficiente di mutua induzione è definito come:

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} I_1 \tag{5}$$

ed il flusso Φ:

$$\Phi_{1,2} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS \tag{6}$$

Essendo piccolo il diametro della spira rispetto alla distanza tra i fili, possiamo considerare uniforme il campo sulla superficie delimitata della spira. Ne segue che

$$M = \frac{BS}{I} \tag{7}$$

dove $S = \pi r^2$ è la superficie della spira. Allora, quando la spira è posta in C, la mutua induzione è:

$$M^C = \frac{\mu_0}{2d} r^2 (2 + \pi) = 2.6 \cdot 10^{-11} H \tag{8}$$

Quando è in P, si ottiene:

$$M^P = \frac{2\mu_0}{d} r^2 = 2.0 \cdot 10^{-11} H \tag{9}$$

c) La forza elettromotrice F generata dalla variazione del flusso concatenato con la spira, in C è pari a

$$F^C = -\frac{d\Phi}{dt} = -M^C \frac{dI(t)}{dt} = M^C 2\pi\nu I_M \sin(2\pi\nu t) \tag{10}$$

ed in P

$$F^P = M^P 2\pi\nu I_M \sin(2\pi\nu t) \tag{11}$$

Infine, per dedurre la potenza media dissipata per effetto Joule, occorre prima calcolare la resistenza della spira:

$$R_s = 2\pi r\rho/s = 4.3 \cdot 10^{-2} \Omega \tag{12}$$

Quindi si conclude che la potenza media dissipata dalla spira posta C, è

$$< P^C >= \frac{F^2}{R_s} = \frac{1}{2} \frac{(M^C 2\pi\nu I_M)^2}{R_s} = 3.1 \cdot 10^{-13} W \tag{13}$$

e quando è in P, si ha

$$< P^P >= \frac{F^2}{R_s} = \frac{1}{2} \frac{(M^P 2\pi\nu I_M)^2}{R_s} = 1.9 \cdot 10^{-13} W \tag{14}$$