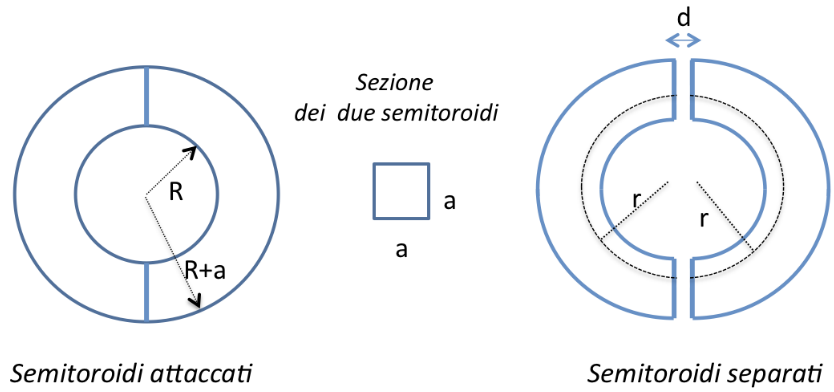
Terza prova di esonero di Elettromagnetismo
a.a. 2012/2013 - 7 Giugno 2013
proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

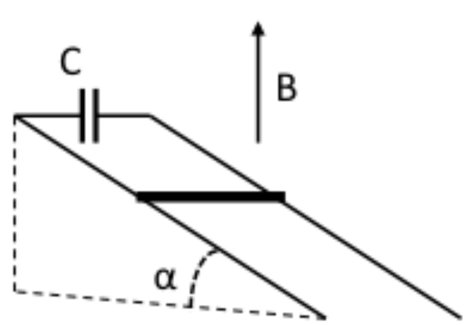
Esercizio 1
Un toroide di materiale ferromagnetico con sezione quadrata di lato $a = 4$ cm e raggio interno $R = 10$ cm, è costituito da due semitoroidi identici inizialmente attaccati. Il toroide viene magnetizzato sino alla saturazione con opportuni avvolgimenti percorsi da corrente. Portata a zero la corrente elettrica negli avvolgimenti, il toroide rimane magnetizzato. In queste condizioni, per valori del campo magnetico $H < 0$ e valori del campo di induzione magnetica $B > 0$, si può assumere la relazione approssimata:

$$B = B_r(\frac{H}{H_c} + 1)$$

essendo $B_r = 2\ T$ e $H_c = 80\ A/m$.
Successivamente i due semitoroidi vengono allontanati di una distanza $d = 5\ mm$. Sapendo che, all'interno di ciascun semitoroide, le linee di forza dei campi $\vec{B}$, $\vec{H}$ ed $\vec{M}$ sono delle semicirconferenze e che i moduli di tali campi dipendono dal raggio r, trascurando il flusso disperso si determinino
a) le espressioni di $B(r)$ e $H(r)$,
b) l'intensità di magnetizzazione $M(r)$,
c) le densità di corrente amperiana su tutte le superfici del toroide.
Si calcolino infine sulle sole superfici $r = R$ e $r = R + a$,
d) i valori numerici sia delle densità superficiali di corrente che delle corrispondenti correnti superficiali totali amperiane.



Esercizio 2
Una barretta metallica di massa $m = 50\ g$ e resistenza elettrica $R = 10\ k\Omega$ poggia i suoi estremi su due guide metalliche parallele distanti $a = 15\ cm$, con coefficiente di attrito e resistenza elettrica trascurabili. Le due guide sono elettricamente connesse tramite un condensatore di capacità $C = 20\ \mu F$ e sono inclinate di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto al piano orizzontale (vedi figura). Il sistema é immerso in un campo d'induzione magnetica uniforme $|\vec{B}| = 2.0\ T$, verticale, orientato verso l'alto. Il condensatore è inizialmente scarico e la baretta è ferma. Al tempo $t = 0$ essa viene lasciata scivolare lungo le guide sotto l'azione del suo peso.
Trascurando l'autoinduzione, si determini:
a) l'equazione del circuito elettrico,
b) l'equazione del moto della barretta;
c) l'andamento della corrente che circola nella barretta in funzione del tempo,
d) il valore numerico della corrente dopo 0.2 s dall'istante iniziale.



Soluzioni

Esercizio 1

a)
Per il teorema della circuitazione di Ampère possiamo scrivere:

$$2\pi r H + 2H_0 d = 0 \quad \text{con nel vuoto} \;\; H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

e da questa e dalla relazione data, il sistema:

$$\begin{cases} B = -\frac{\mu_0 \pi r}{d} H \\ B = \frac{B_r}{H_c} H + B_r \end{cases}$$

dal quale:

$$B = B_r \frac{r}{r+A} \qquad e \qquad H = -\frac{d}{\mu_0 \pi} \frac{B_r}{r+A} \qquad \text{con} \qquad A = \frac{B_r d}{\mu_0 \pi H_c}$$

b)
Dalle precedenti e dalla relazione $H = (B - \mu_0 M)/\mu_0$ si ricava $M(r)$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi r + d}{r + A} \right)$$

c)
Per il calcolo delle densità di corrente conviene fare il calcolo in coordinate cilindriche centrate nel centro di un semitoroide. In questo caso $\vec{M}$ ha componenti $(0, M, 0)$. Da $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$ si trova:

sulla superficie a $r = R$ con $\hat{n}$ $(-1, 0, 0)$ $J_{ms} = \frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi R + d}{R + A} \right)$

sulla superficie a $r = (R + a)$ con $\hat{n}$ $(1, 0, 0)$ $J_{ms} = -\frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi (R+a) + d}{R + a + A} \right)$

sulla superficie superiore con $\hat{n}$ $(0, 0, 1)$ $J_{ms} = \frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi r + d}{r + A} \right)$

sulla superficie inferiore con $\hat{n}$ $(0, 0, -1)$ $J_{ms} = -\frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi r + d}{r + A} \right) \qquad .$

d)
Le densità di correnti amperiane sulle due facce verticali sono

$$J_{ms}(R) = \frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi R - d}{R + A} \right) = 5.1\ kA/m$$

$$J_{ms}(R+a) = p - \frac{B_r}{\mu_0 \pi} \left(\frac{\pi(R+a) - d}{R + a + A} \right) = -7.1\ kA/m$$

Le correnti totali amperiane sono:

$$I_m(R) = 2\pi R\ J_{ms}(R) = 3.2\ kA$$

$$I_m(R+a) = 2\pi(R+a)\ J_{ms}(R+a) = -6.2\ kA$$

<u>*Osservazione:*</u>

La densità di corrente amperiana di volume non è nulla. Si può trovare facilmente calcolando in coordinate cilindriche:

$$\vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad .$$

Rimane la sola componente $\hat{z}$ che, essendo M_r nulla, risulta:

$$\vec{J}_{mv}(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r M_\varphi\right)\hat{z} = \frac{1}{r}\frac{B_r}{\mu_0 \pi}\left(\frac{\pi r^2 + A(2\pi r + d)}{(r+A)^2} \right)\hat{z}$$

Integrando $\vec{J}_{mv}(r)$ su una sezione del toroide perpendicolare all'asse z, si trova la corrente totale di volume I_{mv}:

$$I_{mv} = 2 \int_R^{R+a} \vec{J}_{mv}(r) \cdot \hat{z}\ \pi r\ dr$$

e si verifica facilmente che: $I_{ms}(R) + I_{mv} = |I_{ms}(R+a)|$.

Esercizio 2

a)
L'equazione del circuito è:

$$f - \frac{1}{C}\int^{t} i(t')dt' = R\ i(t)$$

in cui la forza elettromotrice è data da

$$f = -d\Phi(\vec{B})dt = -\frac{d}{dt}[B\cos\alpha\ a\ x] = -a\ B\ \ \cos\alpha\frac{dx}{dt}$$

dove con x e $v = dx/dt$ abbiamo indicato rispettivamente la posizione e la velocità della barretta al tempo t lungo il piano inclinato. Notare che il segno "-" della legge di Lenz indica il verso della forza elettromotrice in relazione al segno delle variazioni di B e non il segno rispetto al verso positivo delle correnti, peraltro del tutto arbitrario. Pertanto, se si sceglie arbitrariamente il verso *orario* come positivo per la corrente, l'equazione differenziale del circuito elettrico si scrive:

$$aB\cos\alpha\ v - \frac{1}{C}\int^{t} i(t')dt' = R\ i(t) \tag{1}$$

b)
L'equazione del moto è:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ g\ \ \sin\alpha - a\ B\cos\alpha\ i \tag{2}$$

dove $F_L = -a\ B\cos\alpha\ i$ è la forza magnetica agente sulla barretta.

c)
Dall'equazione del circuito (1) si può isolare la velocità istantanea, ottenendo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{C\ a\ B\cos\alpha}\int^{t} i(t')dt' + \frac{R}{a\ B\cos\alpha}\ i \tag{3}$$

Derivando la (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{C\ a\ B\cos\alpha}i + \frac{R}{a\ B\ cos\alpha}\frac{di}{dt}$$

e sostituendo nella (2), si ottiene:

$$\frac{di}{dt} + i[\frac{1}{RC} + \frac{(aB\cos\alpha)^2}{mR}] = \frac{g\ a\ B\ \ \sin\alpha\cos\alpha}{R} \tag{4}$$

Riconoscendo che

$$\bar{i} = \frac{g\ a\ B \sin\alpha\cos\alpha}{R} / [\frac{1}{RC} + \frac{(aB\cos\alpha)^2}{mR}] = g\ a\ B\sin\alpha\cos\alpha / [\frac{1}{C} + \frac{(aB\cos\alpha)^2}{m}]$$

è una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare non omogena (4), e che la condizione iniziale è $i(t = 0) = 0$, deduciamo che la soluzione dell'equazione è

$$i = \bar{i}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

dove $\tau = RC/[1 + \frac{C(aB\cos\alpha)^2}{m}] = 0.2\ s$

c)
Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\bar{i} = 2.55 \cdot 10^{-5}\ A \qquad\qquad i(t = 0.2\ s) = 1.6 \cdot 10^{-5}\ A$$