Prova scritta di Elettromagnetismo - Sessione estiva - I appello - a.a. 2012/2013

a.a. 2012/2013 - 18 Giugno 2013

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Esercizio 1

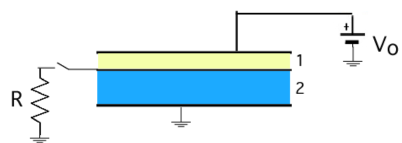
Un condensatore piano con le armature metalliche di superfici $S = 100\ cm^2$, contiene all'interno due lastre di materiale dielettrico di costanti relative $\epsilon_{r_1} = 1.5$ e $\epsilon_{r_2} = 2.0$. Le due lastre hanno spessori $h_1 = 2\ mm$ e $h_2 = 3\ mm$, sono separate tra loro da uno strato metallico di spessore trascurabile e riempiono completamente lo spazio tra le armature. Il condensatore ha una armatura posta a terra e l'altra connessa ad un generatore di tensione $V_0 = 100\ V$. Lo strato metallico tra le due lastre può essere connesso a terra tramite un ramo in cui è presente un interruttore ed una resistenza $R = 10\ k\Omega$. Trascurando gli effetti di bordo si calcoli:

a) il potenziale dello strato metallico quando l'interruttore è aperto;

b) come varia nel tempo il potenziale dello strato metallico quando l'interruttore è chiuso,

c) l'energia totale dissipata nella resistenza,

d) il lavoro complessivo compiuto dal generatore.



Esercizio 2

Un piccolo cilindro di materiale ferromagnetico, di altezza $h = 10\ mm$ e diametro $d = 5\ mm$, ha l'asse coincidente con quello di due spire circolari identiche di raggio $R = 20\ cm$, disposte orizzontalmente ad una distanza $L = 50\ cm$ l'una dall'altra. La magnetizzazione del cilindro è uniforme, diretta lungo l'asse comune ed orientata verso la spira in alto: la sua intensità è $M = 7 \cdot 10^6\ A/m$. Le due spire sono poste in serie così che in esse circola nello stesso verso una corrente di pari valore $i = 32\ A$.

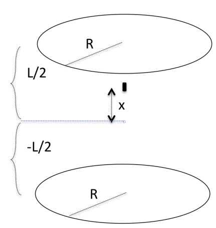
Sapendo che il cilindro è vincolato a muoversi solo lungo l'asse del sistema, si ricavi:

a) il momento di dipolo magnetico del cilindretto,

b) l'espressione dell'energia potenziale del cilindretto in funzione della distanza x tra il suo centro e quello del sistema formato dalle due spire;

c) l'espressione della forza esercitata dalle bobine sul cilindretto in funzione di x calcolandone i valori numerici per $x = \pm\frac{L}{2}$ e $x = 0$.

Nota: *Si trascurino gli effetti dovuti alla gravità.*



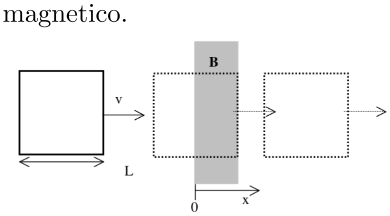
Esercizio 3

Una spira quadrata di lato $L = 1.2\ m$ si muove con velocità costante $v = 10\ m/s$ ed entra, come in figura, in una regione di spazio in cui è presente un campo di induzione magnetica $B = kx$, con $k = 11\ T/m$, diretto ortogonalmente al piano della spira. Il campo è esteso lungo una regione di lunghezza h pari alla metà della lunghezza della spira stessa ($h = 60\ cm$), così che la spira nel suo moto attraversa tutta questa regione di spazio. Trascurando l'autoinduzione, si determini:

a) la resistenza della spira sapendo che la corrente indotta quando il primo lato della spira ha spazzato completamente la regione con campo magnetico ($x^* = 60\ cm$) è $i^* = 1.2\ A$,

b) il lavoro totale della forza che trascina la spira a velocità costante,

c) il valore totale della carica elettrica che è transitata lungo la spira dopo che quest'ultima ha traversato completamente la regione ove è presente il campo magnetico.



Soluzioni

Esercizio 1

a)
Il sistema è equivalente a due condensatori posti in serie le cui capacità sono rispettivamente:

$$C_1 = \epsilon_o \epsilon_{r_1} \frac{\Sigma}{h_1} = 66.5\ pF \qquad\qquad C_2 = \epsilon_o \epsilon_{r_2} \frac{\Sigma}{h_2} = 59\ pF$$

Indicando con V il potenziale dela lastra, prima di aprire l'interruttore tale potenziale è

$$V(t=0) = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

b)
Chiudendo l'interruttore, lungo la resistenza si scarica parte della carica contenuta in C_1 e tutta la carica accumulata in C_2. Per quantificare questo processo, scriviamo la carica totale presente sullo strato metallico all'istante generico

$$Q = Q_2 - Q_1$$

essendo

$$Q_1 = C_1(V_0 - V) \qquad Q_2 = C_2 V$$

Essendo la corrente che corre nella resistenza

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

applicando la legge di Ohm si ottiene

$$V = -\frac{dQ}{dt} R = -R(C_1 + C2)\frac{dV}{dt}$$

da cui si ricava integrando e imponendo la condizione iniziale $V(t=0) = V_0 \frac{C_1}{C_1+C_2} = 59\ V$

$$V(t) = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dove $\tau = R(C_1 + C_2)$.

c)
L'energia dissipata è

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{R}\int_0^\infty V^2 dt = \frac{V^2(t=0)}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 V_o^2}{C_1 + C_2} = 1.75 \cdot 10^{-7}\ J$$

d)
Il lavoro compiuto dal generatore è dato dal prodotto della carica totale spostata dal generatore per la sua forza elettromotrice V_o. Poichè la carca totale iniziale è

$$Q_{in} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0$$

e la finale

$$Q_{fin} = C_1 V_0$$

segue che il lavoro è

$$\mathcal{L}_g = \left(Q_{fin} - Qin\right) V_0 = \frac{C_1^2 V_o^2}{C_1 + C_2} = 3.5 \cdot 10^{-7}\ J$$

che risulta quindi doppio rispetto all'energia dissipata.

Esercizio 2

a)
Il momento magnetico del cilindretto è calcolabile immediatamente moltiplicando il modulo del vettore intensità di magnetizzazione per il suo volume:

$$m = M\pi\frac{d^2}{4}h = 1.4\ Am^2$$

b)

L'energia potenziale del dipolo in campo magnetico è

$$\mathcal{U}_m = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

dove $\vec{B}$ è il campo delle due spire. Lungo l'asse del sistema $\vec{B}$ è diretto come $\vec{m}$. Sapendo che il campo di una spira circolare in un punto del suo asse distante z dal centro della spira è

$$B = \frac{\mu_o}{2}i\frac{R^2}{\left[R^2+z^2\right]^{3/2}}$$

concludiamo che

$$\mathcal{U}_m = -\frac{\mu_o m}{2}i\left[\frac{R^2}{\left[R^2+(\frac{L}{2}-x)^2\right]^{3/2}}+\frac{R^2}{\left[R^2+(\frac{L}{2}+x)^2\right]^{3/2}}\right]$$

c)
La componente x della forza applicata sul cilindretto è

$$f_x = -\left(\vec{\nabla}\mathcal{U}_m\right)_x = m\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_o m}{2}iR^2\left[\frac{3(\frac{L}{2}-x)}{\left[R^2+(\frac{L}{2}-x)^2\right]^{5/2}}-\frac{3(\frac{L}{2}+x)}{\left[R^2+(\frac{L}{2}+x)^2\right]^{5/2}}\right]$$

d)
Dalla formula precedente si deduce

$$f_x(x=-\frac{L}{2}) = -f_x(x=\frac{L}{2}) = \frac{3\mu_o m}{2}iR^2\left[\frac{L}{\left[R^2+L^2\right]^{5/2}}\right] = 3.65\cdot 10^{-5}\quad N$$

e

$$f_x(x=0)=0$$

Esercizio 3

a)
Il flusso del campo di induzione magnetica tagliato dalla spira è:

$$\Phi[B(x)] = \int kxLdx = \frac{1}{2}L\ k\ x^2$$

Ne risulta che la forza elettromotrice indotta dipende dalla posizione della spira

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = -v\ k\ x\ L$$

Per la corrente è

$$i = -\frac{1}{R}\frac{\Phi}{dt} = -\frac{Lkvx}{R}$$

da cui segue che in $x = x^*$

$$R = \frac{v\ k\ h\ L}{i^*} = 66\ \Omega$$

b)
Per mantenere costante la velocità della spira, la forza di trascinamento deve esser pari in modulo alla forza che il campo magnetico esercita sulla spira percorsa da corrente :

$$|F| = i\ B\ L = \frac{1}{R}vk^2L^2x^2$$

Pertanto il lavoro nell'attraversamento dell'intera regione è:

$$\mathcal{L} = \frac{2}{R}\int_0^h vk^2L^2x^2dx = \frac{2vk^2L^2h^3}{3R} = 3.8\ J$$

c)
Si noti che la corrente i, durante il transito della spira nella regione di campo magnetico, per metà del tempo corre in un verso e per l'altra metà nel verso opposto.

Infatti, ad attraversamento concluso il flusso del campo B tagliato dalla spira finale è nullo come quello iniziale e si deduce quindi dalla legge di Felici che

$$Q = \frac{Q_{finale} - Q_{iniziale}}{R} = 0$$

Considerando metà del percorso, la carica transitata è

$$Q_m = 3.6 \cdot 10^{-2}\ C$$