Esame scritto di Elettromagnetismo del 10 Luglio 2014 - a.a. 2013-2014

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,2,3 tempo 3 h e 30 min;

Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti 1,2,3, tempo 1h e 20 min.

Esercizio 1

Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 1.0\ cm$ è situata al centro di tre superfici sferiche conduttrici concentriche di raggi $R_2 = 2.0\ cm$, $R_3 = 3.0\ cm$, $R_4 = 4.0\ cm$. Le due superfici di raggi R_2 e R_4 sono connesse elettricamente tra loro mentre la superficie di raggio R_3 è posta a massa (a potenziale nullo). Sulla sfera è depositata una carica $Q_1 = 10\ nC$.

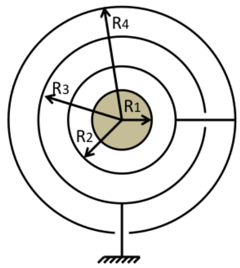
a) Si determinino le capacità tra le superfici 1 e 2, tra la 2 e la 3, e tra la superficie 4 e il potenziale nullo.

Si calcolino poi:

b) il potenziale della sfera,

c) il potenziale delle superfici connesse,

d) le cariche presenti su ogni superficie sferica.



Esercizio 2

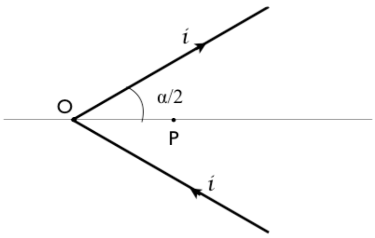
Un filo conduttore rettilineo di lunghezza infinita viene piegato in un punto O in modo da formare una V (vedi figura), cioè due semirette uscenti dal punto O formanti un angolo di ampiezza α. Esso è percorso da una corrente i.

a) Si calcoli il campo di induzione magnetica, in modulo direzione e verso, in un punto P che giace sull'asse di simmetria del sistema ad una distanza d dal punto O.

b) Si verifichi che per $\alpha = \pi$ si ottiene la formula di Biot e Savart per un filo rettilineo,

c) Si individui l'orientazione di un aghetto magnetico posto in P e libero di rotare attorno al suo centro e si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Si assuma che il momento magnetico dell'aghetto sia $m = 1.6 \times 10^{-2}\ Am^2$, *il suo momento di inerzia* $I = 0.6\ g\ mm^2$, $d = 20\ cm$, $\alpha = \pi/3$ *e* $i = 40\ A$.



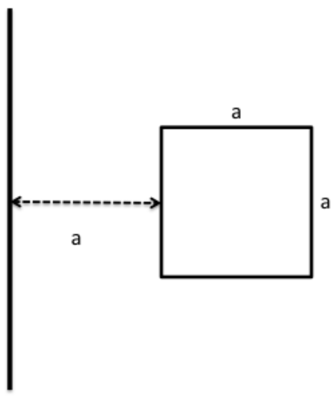
Esercizio 3

Una spira conduttrice rigida ha forma di un quadrato di lato $a = 0.1\ m$ ed è fissata su di un piano orizzontale. Ciascun lato della spira ha una resistenza elettrica pari a $R = 0.3\ \Omega$. Un lato della spira è parallelo ad un filo conduttore indefinito appoggiato sul piano orizzontale ed è posto a distanza a dal filo stesso. In questo filo scorre una corrente sinusoidale di frequenza pari a $\nu = 50\ Hz$ ed ampiezza $I_o = 4.1\ A$. Trascurando l'autoinduzione della spira, si calcoli:

a) il coefficiente di mutua induzione tra il filo e la spira,

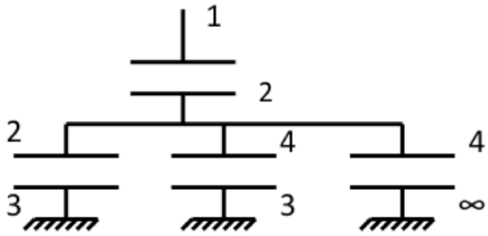
b) l'ampiezza della corrente elettrica sinusoidale $I_i(t)$ indotta nella spira,

c) il valore efficace della risultante delle forze agente sulla spira e la sua direzione.



Soluzioni

Esercizio 1 In figura è riportato il circuito equivalente del sistema di superfici sferiche concentriche.



Le capacità richieste sono:

a)

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 2.2\ pF$$
$$C_{23} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2} = 6.7\ pF$$
$$C_{43} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_4 R_3}{R_4 - R_3} = 13.3\ pF$$
$$C_{4\infty} = 4\pi\epsilon_0 R_4 = 4.45\ pF$$
$$C_{40} = C_{43} + C_{4\infty} = 17.8\ pF$$

b)
La capacità totale C_{TOT} tra la sfera e massa (potenziale 0) è:

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{23} + C_{43} + C_{4\infty}}$$

ovvero $C_{TOT} = 2.04\ pF$.
Il potenziale della sfera è:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_{TOT}} = 4.90\ kV$$

c)
Il potenziale delle superfici connesse è:

$$V_2 = \frac{Q_1}{C_{23} + C_{43} + C_{4\infty}} = 409\ V$$

d)
Le cariche sono:

$$Q_2{}^{(int)} = -Q_1$$

$$Q_2{}^{(ext)} = C_{23}V_2 = 2.7\ nC$$

Quidi si ha:

$$Q_2 = Q_2{}^{(ext)} + Q_2{}^{(int)} = -7.3\ nC$$

$$Q_3 = -V_2(C_{23} + C_{43}) = -8.2\ nC$$

In particolare si potrebbero anche dedurre:

$$Q_3{}^{(int)} = -Q_2{}^{(ext)} = -2.7\ nC$$

$$Q_3{}^{(ext)} = Q_3 - Q_3{}^{(int)} = -5.4\ nC$$

Infine

$$Q_4 = C_{40}V_2 = 7.3\ nC$$

ed in particolare si potrebbero anche dedurre:

$$Q_4{}^{(int)} = -Q_3{}^{(ext)} = 5.4\ nC$$

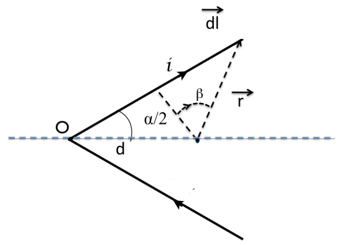
$$Q_4{}^{(ext)} = Q_4 - Q_4{}^{(int)} = 1.8\ nC$$

Esercizio 2

a)
Con riferimento alla figura, si nota immediatamente che i due tratti di filo danno contributi uguali sul semiasse lungo il quale $\vec{B}$ è entrante.
Calcoliamo quindi il contributo del campo in P di una delle due semirette percorse dalla corrente i. Essendo d la distanza OP, il punto P dista dalle rette cui appartengono ciascuna delle due porzioni di filo

$$a = d\ sin(\alpha/2)$$

Sia ora $\vec{dl}$ il generico elemento di linea percorso dalla corrente i e $\vec{r}$ il vettore che da $\vec{dl}$ individua il punto P. Sia poi β l'angolo mostrato in figura



Applicando la formula di Laplace si ha

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_o}{4\pi} i \int_0^{\infty} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\vec{B_1}$ è perpendicolare al piano dove giacciono le due semirette, ed ha modulo pari a B_1

$$B_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} i \int_0^{\infty} \frac{dl}{r^2} cos\beta \tag{1}$$

Per integrare l'espressione precedente notiamo che

$$r = \frac{a}{cos\beta} \qquad l = d\ tang\beta \qquad dl = a\frac{d\beta}{cos^2\beta}$$

Sostituendo queste relazioni nella (1), si ottiene

$$B_1 = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i}{a}\int_{-(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})}^{\frac{\pi}{2}} cos\beta d\beta = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i}{a}(1 + cos\frac{\alpha}{2})$$

Tenendo conto che il contributo B_2 dell'altro filo è uguale a B_1 , si ha

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_o}{2\pi} i \frac{1 + cos\frac{\alpha}{2}}{d\ sin(\alpha/2)} = 1.5 \cdot 10^{-5}\ T \tag{2}$$

b)
Si noti come la (2), per $\alpha = \pi$, si riduce alla formula di Biot-Savart.

c)
Il momento meccanico agente sull'aghetto é

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

per cui l'equazione del moto è:

$$I\ddot{\theta} = -mBsin(\theta)$$

essendo θ l'angolo del vettore $\vec{m}$ rispetto a $\vec{B}$.

Per le piccole oscillazioni $sin\theta \sim \theta$, l'equazione del moto diventa:

$$I\ddot{\theta} + m\ B\theta = 0$$

da cui si deduce che il quadrato della pulsazione caratteristica delle piccole oscillazioni è:

$$\omega_o^2 = \frac{m\ B}{I} = \frac{\mu_o m i(1 + cos(\alpha/2)}{2\pi I d\ sin(\alpha/2)}$$

Ne segue che la frequenza è:

$$\nu_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 10\ Hz$$

Esercizio 3

Scegliamo un sistema di riferimento in cui l'asse y sia coincidente con il filo e l'asse x divida in due sementi uguali i lati del quadrato paralleli al filo.

a)
Il campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$, generato dal filo percorso da una corrente $I(t) = I_o sin(2\pi\nu t)$ è data dalla formula di Biot e Savart

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{I(t)}{x}\hat{\tau}$$

dove $\hat{\tau}$ è il versore perpendicolare alla superficie della spira ed x è la variabile che individua la distanza tra il punto in cui si calcola il campo ed il filo. Il flusso di $\vec{B}(t)$, concatenato con la spira, si ottiene calcolando l'integrale di superficie

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_o}{2\pi}I(t)\int_{-a/2}^{a/2} dy \int_a^{2a} \frac{1}{x}dx$$

Ne risulta

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_o}{2\pi}a\ ln[2]\ I(t)$$

e quindi il coefficiente di mutua induzione è

$$M = \frac{\Phi(\vec{B})}{I} = \frac{\mu_o}{2\pi}a\ ln[2] = 1.4 \cdot 10^{-8}\ H$$

b)
La forza elettromotrice indotta nella spira di resistenza $4R$ induce la corrente I_i :

$$I_i(t) = -\frac{1}{4R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\mu_o}{4R}a\ ln[2]\ \nu\ I_o cos(2\pi\nu t)$$

Segue che l'ampiezza di $I_i(t)$ è

$$I_i{}^{(o)} = \frac{\mu_o}{4R}a\ ln[2]\ \nu\ I_o = 15\ \mu A$$

c)
La risultante delle forze di origine magnetica che agisce sulla spira si ottiene sommando vettorialmente i contributi delle risultanti delle forze agenti su ciascun lato del quadrato.
Le forze agenti sui due lati paralleli all'asse x, hanno le solo componenti y diverse da zero; esse sono uguali ed opposte, quindi tenderebbero solo a deformare la spira rigida.
Le forze sui lati paralleli al filo sono dirette lungo l'asse x. Si osservi anche che il verso di scorrimento della corrente, quando in un lato della bobina è concorde con il verso di I, sul lato opposto è discorde. Quindi le forze sui due lati hanno segno opposto:

$$F_{||}{}^{(1)} = +\frac{\mu_o}{2\pi}I_i(t)\ I_o sin(2\pi\nu t)$$

$$F_{||}{}^{(2)} = -\frac{\mu_o}{4\pi}I_i(t)\ I_o sin(2\pi\nu t)$$

Si conclude quindi che la risultante F, diretta lungo l'asse x, è pari a

$$F(t) = \frac{\mu_o}{4\pi}I_i(t)\ I_o sin(2\pi\nu t)$$

ovvero

$$F(t) = \frac{\mu_o{}^2}{16\pi R}\nu\ a\ ln[2]I_o{}^2 sin(2\pi\nu t)\ cos(2\pi\nu t) = \frac{\mu_o{}^2}{32\pi R}\nu\ a\ ln[2]I_o{}^2 sin(4\pi\nu t)$$

Il suo valore efficace è

$$F_{eff} = \left(\frac{ln[2]}{32\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{\mu_o{}^2}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{\nu\ a}{R}\right) I_o{}^2 = 2.1 \cdot 10^{-12} N$$