Esame scritto di Elettromagnetismo del 17 Giugno 2014 - a.a. 2013-2014

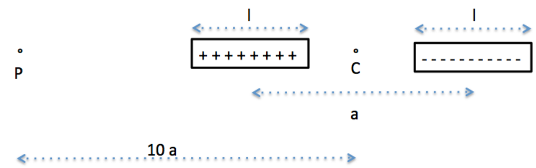
proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,2,3 tempo 3 h e 30 min;

Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti 1,2,3, tempo 1h e 20 min.

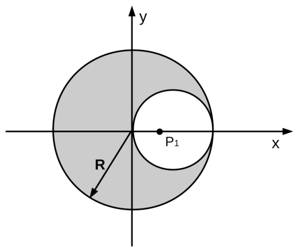
Esercizio 1

Due barrette sottili di lunghezza $l = 5.00$ cm sono allineate come in figura e sono cariche uniformemente rispettivamente con carica totale $q_a = 10.0$ nC e $q_b = -q_a$. I centri delle barrette sono distanti tra loro $a = 10.0$ cm.
Si calcoli l'intensità, la direzione e il verso del campo elettrico generato dal sistema:
a) nel punto C intermedio tra le due barrette,
b) nel punto P, posto lungo la retta su cui giacciono le due barrette, distante $d = 10a$ dal centro C e disposto dal lato della barretta carica positivamente.
c) Si confronti quest'ultimo risultato con quello ottenuto approssimando il sistema delle due barrette con un dipolo equivalente posto in C.



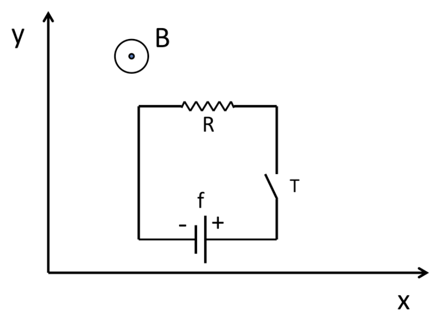
Esercizio 2

Un cilindro conduttore infinitamente lungo di raggio $R = 8.2$ cm e permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1$ ha una sezione, mostrata in figura, che presenta una cavità cilindrica infinitamente lunga. La cavità è centrata a distanza $R/2$ dall'asse ed ha raggio $R/2$. Nel conduttore scorre, parallelamente all'asse con verso uscente dal piano del foglio, una corrente uniformemente distribuita $I = 12$ A.
a) Calcolare la densità di corrente che scorre nel conduttore.
b) Si dimostri che il campo di induzione magnetica all'interno della cavità è uniforme e se ne deduca il modulo, la direzione e il verso.
Successivamente viene posta una spira di raggio $R_s = 2.5$ cm, centrata nel punto $P_1 \equiv (3\ cm, 0\ cm)$, con asse parallelo all'asse del cilindro, in cui scorre in verso orario una corrente di 1.0 A.
c) Si determini il momento meccanico che agisce sulla spira.



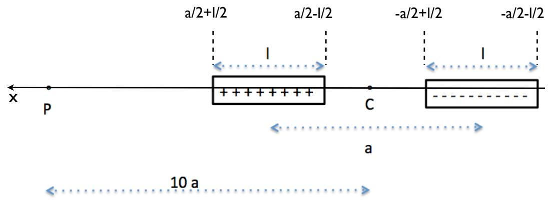
Esercizio 3

Una spira quadrata di lato $l = 90$ cm e massa $m = 80$ g, è inizialmente ferma, con i lati paralleli agli assi x e y, in un campo magnetico $\vec{B}(x) = (B_0 + \beta x)\hat{z}$ con $\beta = 2.5$ T/m. Nella spira di resistenza $R = 8$ Ω è inserita una batteria di forza elettromotrice $f = 2$ V e un interruttore (vedi figura). Chiudendo l'interruttore nel circuito passa corrente e la spira inizia a muoversi. Trascurando l'autoinduzione della spira, si determini:
a) l'equazione del moto della spira;
b) l'andamento nel tempo della velocità della spira e se ne calcoli il valore asintotico;
c) l'andamento nel tempo della corrente;
d) il lavoro totale della batteria e lo si confronti con l'energia cinetica finale della spira.
.



Soluzioni

Esercizio 1
a)



Sia C l'origine del nostro sistema di riferimento ed indichiamo con x l'ascissa, con orientazione positiva nel verso che va da C a P. Per ovvie ragioni di simmetria, nei punti dell'asse x l'unica componente del campo elettrico diversa da zero è la componente E_x. Indicando con $\lambda = q/l$ la densità, le barrette hanno rispettivamente densità lineare di carica $\pm\lambda$ e ll contributo al campo nel punto C, dovuto barretta con carica negativa è:

$$E_x^-(x=0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2} \frac{dx'}{x'^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[-\frac{1}{x'}\right]_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a+l}\right]$$

In C l'altra barretta genera campo della stessa intensità $E_x^+(x=0) = E_x^-(x=0)$, quindi in totale avremo :

$$E_x(x=0) = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a+l}\right] = -\frac{2q}{\pi\epsilon_o(a^2-l^2)} - 95.9\ kV/m$$

b)
In un punto generico dell'asse delle x con $x > a/2 + l/2$, la barretta con carica negativa genera un campo:

$$E_x^-(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2} \frac{dx'}{(x'-x)^2}$$

Posto $y = x' - x$, si ottiene:

$$E_x^-(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-x-a/2-l/2}^{-x-a/2+l/2} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[-\frac{1}{y}\right]_{-x-a/2-l/2}^{-x-a/2+l/2}$$

che per $x = 10\ a$ ci porta alla conclusione:

$$E_x^-(10a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[\frac{1}{-10a-a/2+l/2} - \frac{1}{-10a-a/2-l/2}\right] = -81.59\ V/m$$

Procedendo in modo analogo con l'altra sbarretta:

$${E_x}^+(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{a/2-l/2}^{a/2+l/2} \frac{dx'}{(x'-x)^2}$$

da cui:

$$E_x^+(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-x+a/2-l/2}^{-x+a/2+l/2} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[-\frac{1}{y}\right]_{-x+a/2-l/2}^{-x+a/2+l/2} =$$

che calcolata in $x = 10\ a$

$$E_x^+(x)(10a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[\frac{1}{-10a+a/2-l/2} - \frac{1}{-10a+a/2+l/2}\right] = 99.68\ V/m$$

In totale quindi:

$$E_x(x=10a) = E_x^-(10a) + E_x^+(10a) = 18.09 V/m$$

c)
Approssimando il sistema delle barrette come un dipolo equivalente di modulo pari a

$$p = q\ a$$

il campo in $x = 10\ a$ è:

$$E_x{}^{(dip)} = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0(10a)^3} = 17.98\ V/m$$

Differisce quindi dal valore precedentemente calcolato

$$\frac{E_x - E_x{}^{(dip)}}{E_x} = 0.6\%$$

Esercizio 2
a)
La corrente è

$$I = J\left(\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4}\right) = J\pi R^2\frac{3}{4}$$

da cui

$$J = \frac{4}{3}\frac{I}{\pi R^2} = 0.76\ kA/m^2$$

b)
Usando il principio di sovrapposizione, il campo di un cavo in cui scorre una densità di corrente J si può ricavare dal teorema di Ampère:

$$2\pi r B_1 = \mu_0 J\pi r^2$$

da cui

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J}{2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}$$

Per la parte cava

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{\mu_0 J}{2}\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r_0})$$

quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r_0}$$

nel tratto cavo il campo di induzione magnetica è uniforme, diretto sull'asse y e vale

$$B = \frac{\mu_0 J}{2}\frac{R}{2} = 1.95 \cdot 10^{-5} T$$

Si può arrivare allo stesso risultato calcolando e sommando le componenti dei campi $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$. Infatti le componenti x e y di $\mathbf{B}_1$ sono:

$$B_1^x = -\frac{\mu_0 Jr}{2}\sin\theta = -\frac{\mu_0 Jr}{2}\frac{y}{r} = -\frac{\mu_0 Jy}{2}$$
$$B_1^y = \frac{\mu_0 Jr}{2}\cos\theta = \frac{\mu_0 Jr}{2}\frac{x}{r} = \frac{\mu_0 Jx}{2}$$

essendo θ l'angolo al centro. Analogamente si calcolano le componenti per $\mathbf{B}_2$:

$$B_2^x = \frac{\mu_0 Jy}{2}$$
$$B_2^y = \frac{\mu_0 J(x_0 - x)}{2}$$

essendo x_0 la distanza tra i centri dei due cilindri. Sommando le componenti, si ottiene:

$$B_T^x = 0$$

$$B_T^y = \frac{\mu_0 J x_0}{2} = \frac{\mu_0 JR}{4}$$

c)
Il momento magnetico della spira è

$$\mathbf{m} = I_s \pi R_s^2$$

In campo uniforme si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

il cui valore è $M = 3.8 \cdot 10^{-8} N \cdot m$ in direzione x.

Esercizio 3

a)
Alla chiusura dell'interruttore nella spira passa corrente e sui lati paralleli all'asse y sono presenti due forze uguali ed opposte:

$$m\frac{dv}{dt} = ilB(x+l) - ilB(x) = il\left[(B_0 + \beta(x+l)) - (B_0 + \beta x)\right] = \beta l^2 i$$

b)
Il flusso di B concatenato con la spira è:

$$\Phi_B(x) = \int_x^{x+l} (B_0 + \beta x)l \; dx = B_0 l^2 + \frac{1}{2}\beta l^3 + \beta l^2 x$$

che produce una f.e.m. indotta:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\beta l^2 v$$

l'equazione del circuito è:

$$f + f_i = Ri \qquad f - \beta l^2 v = Ri$$

Si ha quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = \beta l^2 i \\ f - \beta l^2 v = Ri \end{cases}$$

Ricavando la corrente dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si trova l'equazione del moto:

$$m\frac{dv}{dt} = \beta l^2 \frac{f - \beta l^2 v}{R}$$

che integrata dà l'espressione della velocità:

$$v(t) = \frac{f}{\beta l^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{con} \quad \tau = \frac{mR}{\beta^2 l^4} \quad \text{e velocità asintotica} \;\; v(\infty) = \frac{f}{\beta l^2} = 0.99 \; m/s \;\; .$$

c)
Ne segue che la corrente varia secondo l'espressione:

$$i(t) = \frac{f}{R}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

d)
L'energia cinetica finale della spira è:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{f}{\beta l^2}\right)^2 = 39 \; mJ \; .$$

Il lavoro totale fatto dalla batteria è:

$$L_G = \int_0^\infty fi \; dt = \frac{f^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{f^2}{R}\tau = m\left(\frac{f}{\beta l^2}\right)^2 = 78 \; mJ \; .$$

L'energia fornita dal generatore è il doppio dell'energia cinetica, la differenza, pari a quest'ultima, è dissipata in effetto Joule nella resistenza come è facile verificare dal calcolo diretto.