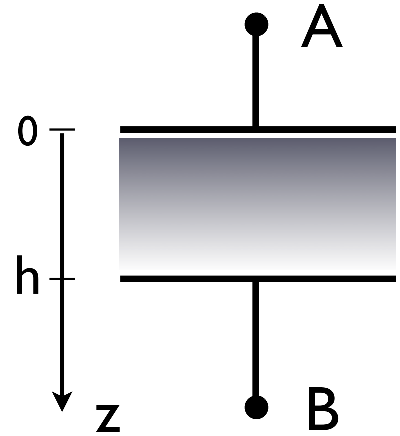
Corso di Elettromagnetismo

a.a. 2013/14, prova scritta sessione speciale del 21 Dicembre 2014

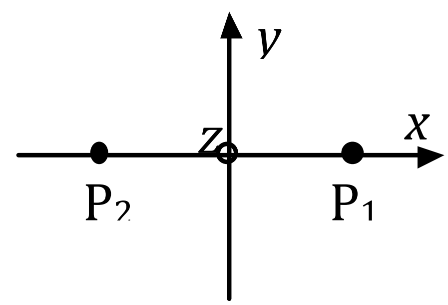
Proff. F. Lacava, D. Trevese

Esercizio 1



Un condensatore piano con armature quadrate di lato $l = 5.0$ cm e distanti tra loro $h = 2.0$ mm è riempito completamente con un materiale isolante a densità variabile lungo lasse z come indicato in figura. La costante dielettrica dell'isolante varia secondo la legge $\epsilon_r = 1/(a + bz)$, dove $a = 0.08$ e $b = 0.05$ mm^{-1}. La differenza di potenziale tra i punti A e B vale $V = 90$ V. Calcolare:
a) la capacità del condensatore;
b) la carica presente sulle armature del condensatore;
c) la densità superficiale delle cariche di polarizzazione sulle due superfici (z=0 e z=h) del materiale isolante;
d) la densità di volume delle cariche di polarizzazione all'interno del materiale isolante.
e) Confrontare la carica totale di polarizzazione superficiale con quella di volume.

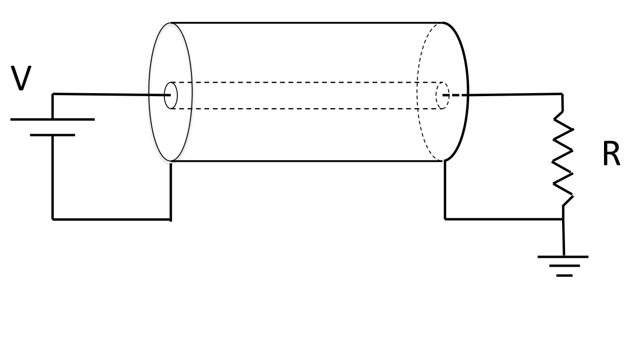
Esercizio 2



Due fili infinitamente lunghi sono posti a distanza $d = 10$ cm parallelamente all'asse z e passano nei punti $P_1(d, 0, 0)$ e $P_2(-d, 0, 0)$. Essi sono ambedue percorsi da una corrente $i = 10$ A diretta come l'asse z ed uscente dal piano del foglio.
a) Si calcolino le espressioni delle componenti del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ in un generico punto dell'asse x e dell'asse y.
b) Si determini l'equazione del moto di una particella di massa m e carica $-q$ che si trovi all'istante iniziale in un punto $x << d$, $y = 0$ e $z = 0$ con velocità $v_o = (0, 0, v_o > 0)$ e si verifichi che tale moto è di tipo sinusoidale lungo l'asse x e se ne calcoli la frequenza.
Si assuma $q = 1.0 \cdot 10^{-17}$ C, $m = 2.5 \cdot 10^{-25}$ kg, $v_o = 1.0 \cdot 10^{7}$ m/s [Si trascurino gli effetti di irraggiamento e relativisitici sul moto della carica].

Esercizio 3

Un cavo conduttore cilindrico di lunghezza l è composto da un conduttore interno di raggio a = 0,1 cm e da una superficie conduttrice cilindrica esterna di raggio b = 1,5 cm, entrambi di resistenza trascurabile (da assumere nulla). La superficie esterna del conduttore è connessa a massa; il conduttore interno ad una estremità è connesso ad un alimentatore di voltaggio V = 20 V e all'altra è connessa a massa attraverso una resistenza R= 250 Ω, come in figura.
Trascurando gli effetti di bordo:
a) si trovino le espressioni dei campi elettrico e di induzione magnetica nello spazio compreso fra i due conduttori all'interno del cavo;
b) si determini il vettore di Poynting nello spazio compreso fra i due conduttori all'interno del cavo, dandone l'espressione del modulo e indicandone direzione e verso. Si calcoli il suo valore a r = 0,9 cm dall'asse;
c) si determini l'espressione del flusso del vettore di Poynting attraverso una sezione perpendicolare all'asse del cavo e si calcoli il suo valore;



Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a) $D = \sigma = Q/S = Q/l^2$; $E = \frac{D}{\epsilon_o \epsilon_r} = \frac{Q_1'}{l^2 \epsilon_o}(a + bz)$;
$V = \int_A^B E dz = \int_A^B \frac{Q}{l^2\epsilon_o}(a + bz)dz = \frac{Q}{l^2\epsilon_o}(ad + \frac{bh^2}{2})$
La capacita' del condensatore é pertanto: $C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_o l^2}{h(a+\frac{bh}{2})} = 85pF$

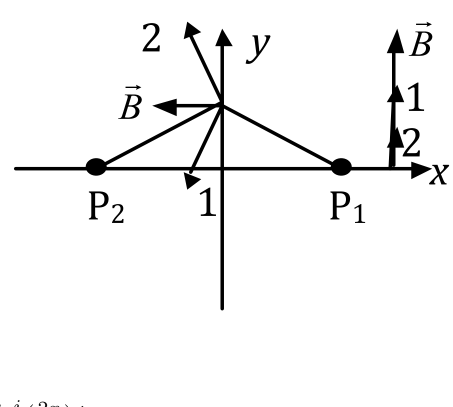
[Si noti che la soluzione poteva essere ottenuta considerando il condensatore come la serie di condensatori di spessore infinitesimo dz per i quali si ha:
$d\frac{1}{C} = \frac{dz}{\epsilon_o\epsilon_r l^2}$, da cui $\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_o l^2}\int_0^h (a + bz)dz$, che fornisce lo stesso risultato.]

b)
$Q = CV = 7.65\text{nC}$

c)
$\vec{P} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)\vec{E} = \epsilon_o(\epsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\epsilon_o\epsilon_r}\hat{z} = \sigma(1 - a - bz)\hat{z}$,   da cui:
$\sigma_P(z = 0) = -Q(1-a)/l^2 = -2.8\,\mu\text{C/m}^2$ e $\sigma_P(z = h) = Q(1-a-bh)/l^2 = 2.5\,\mu\text{C/m}^2$
d)
$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial z}[(1 - a - bz)Q/l^2] = bQ/l^2 = 1.53 \cdot 10^{-5}\text{C/m}^3$
Si noti che ρ_P é uniforme nel volume del materiale isolante. e)
La carica totale di polarizzazione sulle superfici del'isolante é:
$Q_P^S = l^2(\sigma_P(0)_s igma_P(h) = Q[-(1 - a) + (1 - a - bh) = -Qbh]$
la carica di polarizzazione nel volume é:
$Q_P^V = l^2 h\rho_P = Qbh$.
Pertanto la carica di polarizzazione totale é: $Q^P = Q_P^S + Q_P^V = 0$

Esercizio 2

a)
lungo l'asse y (cioé $x = 0, z = 0$) si ha $\vec{B} = -\frac{\mu_o i}{2\pi}(\frac{2y}{d^2+y^2})\hat{x}$
lungo l'asse x (cioé $y = 0, z = 0$) si ha $\vec{B} = \frac{\mu_o i}{2\pi}(\frac{1}{x-d} + \frac{1}{x+d})\hat{y}$



b)
nel limite $x << d$, lungo l'asse x (cioé $y = 0, z = 0$), si ha $\vec{B} = -\frac{\mu_o i}{2\pi}(\frac{2x}{d^2})\hat{y}$
la forza di Lorentz é: $F_x = -qv_o\frac{\mu_o i}{\pi d^2}$, $F_y = 0$, $F_z = 0$
pertanto il moto si svolge nel piano (x, z), cioé $y = 0$, con velocità $v_z = v_o = cost$ mentre lungo l'asse x l'equazione del moto é:

$m\ddot{x} = -qv_0\frac{\mu_o i}{\pi d^2}x$
che corrisponde ad una oscillazione con frequenza $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qv_o\mu_o i}{\pi m d^2}} = 64\text{Hz}$

Esercizio 3

a) All'interno del conduttore è presente un campo elettrico radiale E che si ricava facilmente dal teorema di Gauss:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Integrando il campo da a a b si trova la d.d.p. V e si ricava λ:

$$V = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} log\frac{b}{a} \qquad \lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{log\frac{b}{a}}$$

e quindi il campo elettrico radiale: $$E = \frac{V}{log\frac{b}{a}}\frac{1}{r}$$

Nel conduttore interno passa una corrente $i = V/R$. A questa è associato un campo B con linee di forza circolari con centro sull'asse, giacenti in piani normali all'asse del conduttore e con verso antiorario rispetto alla direzione della corrente. Per il teorema di circuitazione, a distanza r dall'asse del conduttore il modulo di questo campo è:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{V}{R}\frac{1}{r}$$

b) I campi E e B sono in ogni punto perpendicolari, e ad essi è associato un vettore di Poynting, parallelo all'asse del conduttore e diretto nel verso della corrente. Il suo modulo è:

$$I = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{\mu_0} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{log\frac{b}{a}}\frac{V^2}{R}\frac{1}{r^2}$$

c) Il flusso del vettore di Poynting su una sezione del cilindro perpendicolare all'asse è:

$$\Phi(I) = \int_a^b 2\pi r I dr = \int_a^b 2\pi r \frac{1}{2\pi}\frac{1}{log\frac{b}{a}}\frac{V^2}{R}\frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{log\frac{b}{a}}\frac{V^2}{R}\int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{1}{log\frac{b}{a}}\frac{V^2}{R} log\, r|_a^b = \frac{V^2}{R}$$