Soluzione secondo esonero Elettromagnetismo

June 16, 2016

1 Esercizio 1

a) All'interno del solenoide il valore del campo H è uniforme, assiale, e dipende dalla densità di spire e dalla corrente che scorre in queste

$$H = nI = \frac{N}{l} I = 1.0 \times 10^3 \,\mathrm{A/m} \qquad \text{per } r < r_s \ .$$

Il campo di induzione magnetica B è proporzionale ad H e vale

$$B_0 = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N I}{l} = 4\pi \times 10^{-7} H = 1.3 \times 10^{-3} \,\mathrm{T} \qquad \text{per } r_c < r < r_s$$

nella regione vuota tra il cilindro di ferro e le spire del solenoide e

$$B = \mu_r \mu_0 H = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{l} = \mu_r B_0 = 100 \times 1.3 \times 10^{-3} = 1.3 \times 10^{-1} \,\mathrm{T} \qquad \text{per } r < r_c$$

all'interno del cilindro di ferro. Dalla definizione della magnetizzazione

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = (\mu_r - 1)H = \frac{(\mu_r - 1)NI}{l} = 9.9 \times 10^4 \,\mathrm{A/m}$$

ed è non nulla solo all'interno del cilindo di ferro, per $r < r_c$.

b) La densità di corrente amperiana di superficie valgono

$$j_s = \vec{M} \times \hat{n} = |M| \hat{\phi} = \frac{(\mu_r - 1)NI}{l} \hat{\phi} = 9.9 \times 10^4 \,\mathrm{A/m}$$

$$I_s = j_s l = 1.5 \times 10^5 \,\mathrm{A}$$

e scorre in direzione tangenziale sulla superficie laterale del cilindro. La densità di corrente amperiana di volume sia per il fatto che il mezzo è omogeneo, sia se si calcola esplicitamente (in coordinate cilindriche)

$$j_V = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \ .$$

c) Per calcolare la carica totale misurata dal galvanometro si può applicare la legge di Felici sapendo che

$$\Phi_i = B_0(\pi\rho^2 - \pi r_c^2) + \mu_r B_0 \pi r_c^2 \qquad \Phi_f = B_0 \pi \rho^2 \ ,$$

quindi

$$Q = \frac{1}{R}(\Phi_i - \Phi_f) = \frac{1}{R} B_0 \pi r_c^2 (\mu_r - 1) = 1.6 \times 10^{-5} \,\mathrm{C}$$

d) Il lavoro fatto dalla forza esterna è pari all'opposto della variazione dell'energia magnetica, di cui basta considerare il contributo che varia nell'estrazione del cilindro di ferro, ovvero quella contenuta nel volume occupato dal cilindro stesso

$$L_{ext} = -\Delta U_m = -\frac{1}{2} B_0 H \pi r_c^2 l + \frac{1}{2} B H \pi r_c^2 l = \frac{1}{2} \pi r_c^2 l \mu_0 \left(\frac{NI}{l}\right)^2 (\mu_r - 1) = 1.2 \times 10^{-1} \,\mathrm{J}$$

L'energia magnetica nella regione tra cilindro e solenoide non varia quindi si cancella nel calcolo di ΔU_m.

2 Esercizio 2

a) La variazione di flusso magnetico nella spira produce un campo elettromotore che spinge le cariche dell'anello in direzione tangenziale[1]. Applicando l'equazione di Maxwell

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} \qquad 2\pi r E(r) = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B(z)\right) = -\pi r^2 \frac{dB_z}{dt} \qquad E(r) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dt} = \frac{r}{2}\beta\frac{dz}{dt}\ .$$

Il momento che la forza genera sull'asse dell'anello è

$$\vec{M} = \int_0^{2\pi} dq\hat{dl}\times\vec{E} = \int_0^{2\pi}\lambda r d\phi\vec{r}\times\vec{E}(r) = \lambda r^3\pi\frac{dB_z}{dt}$$

e l'equazione del moto è quindi

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi\lambda r^3}{I}\frac{dB_z}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \omega(z)-\omega_0 = -\frac{\pi\lambda r^3}{I}(B(z)-B(h)) = -\frac{Qr^3}{2I}(B(z)-B(h))$$

che, considerando che $\omega_0 = 0$ e $B_z(h) = 0$ diventa

$$\omega(z) = -\frac{\pi\lambda r^3}{I}B(z) = -\frac{Q}{2m_g}\beta(h-z)\ .$$

Il valore in $z=0$ è $\omega(0) = -\frac{Q}{2m_g}\beta h = -0.9\ \ \text{rad/s}$. Il segno meno indica che la rotazione è nel verso orario e il vettore della velocità angolare punta verso il basso.

Allo stesso risultato si può giungere considerando che sulle cariche dell'anello in caduta agisce una forza di Lorentz dovuta al campo magnetico: questo non ha solamente componente lungo z (data) ma ha anche una componente radiale che si può ricavare sapendo che deve essere $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ ed è quindi legata alla componente verticale. Questa componente è quella che produce un moto tangenziale delle cariche presenti nell'isolante e quindi mette in moto l'anello. Il momento prodotto da questa forza di Lorentz è lo stesso trovato sopra e porta allo stesso risultato finale.

b) L'anello rotante dotato di carica equivale ad una spira percorsa da corrente ed ha quindi un momento magnetico m pari a

$$m = \frac{dQ}{dt}\pi r^2 = \frac{Q}{T}\pi r^2 = \frac{\lambda 2\pi r\omega}{2\pi}\pi r^2 = \lambda\omega\pi r^3 = \frac{Q\omega(z)r^2}{2}$$

quindi l'energia magnetica si può calcolare come

$$U_m(z) = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -\lambda r^3\pi\omega(z)B(z) = \lambda r^3\pi\frac{\lambda\pi r^3}{I}B^2(z) = \frac{Q^2\beta^2 r^2}{4m_g}(h-z)^2$$

che dipende dalla posizione z.

c) Da quanto trovato sinora consegue la presenza di una forza magnetica agente sulla spira (equivalente a un momento magnetico $\vec{m}$) diretta lungo z (verso l'alto) data da

$$F = -\nabla U_m = \nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dz}\left(-\frac{Q^2\beta^2 r^2}{4m_g}(h-z)^2\right) = \frac{Q^2\beta^2 r^2}{2m_g}(h-z)\ ,$$

anch'essa dipendente dalla quota z.

d) Considerando le forze agenti nella direzione z (prendendo un asse positivo verso l'alto) si può scrivere l'equazione del moto di caduta

$$m_g\frac{dv}{dt} = m_g\frac{d^2z}{dt^2} = -m_g g + F_m = -m_g g + \frac{Q^2\beta^2 r^2}{2m_g}(h-z)\ .$$

Volendo si può notare che il secondo termine della forza è molto minore della forza peso quindi, almeno nel tragitto tra la quota h da cui parte l'anello ed il suolo a $z=0$, il moto è uniformemente accelerato con accelerazione sostanzialmente pari a g [2].

[1] Se fosse un materiale conduttore le cariche produrrebbero una corrente all'interno dell'anello ma essendo isolante, e le cariche presenti solidali con l'anello, la forza che sposta le cariche fa ruotare l'intero anello.

[2] Nel caso in cui l'anello potesse sprofondare a $z<0$ e supponendo in quella regione il campo B_z continuasse ad avere la stessa forma analitica, il moto finale sarebbe quello di un oscillatore attorno ad una posizione di equilibrio a $z \ll 0$.