

Prova Scritta di Elettromagnetismo - 26.1.2018

(A.A. 2016/17, Prof. S.Giagu, F.Lacava, S.Petrarca)

Esercizio 1

Una carica $q = 20 \text{ mC}$ è depositata su una piccola sfera metallica di raggio $R_1 = 0.5 \text{ cm}$ al centro di uno strato metallico di raggio interno $R_2 = 2 \text{ cm}$ e raggio esterno $R_3 = 10 \text{ cm}$ sul quale è stata depositata una eguale carica $q = 20 \text{ mC}$. Lo strato è circondato da un involucro sferico dielettrico di spessore 5 cm e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5$.

Si determini:

- il campo elettrico in tutto lo spazio,
- le cariche di polarizzazione indicando la loro densità e dove sono situate,
- il valore del potenziale della piccola sfera metallica.

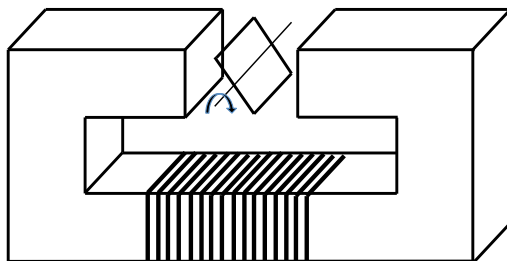
Esercizio 2

Un circuito magnetico di sezione quadrata di lato $d = 10 \text{ cm}$, è composto da una parte in ferro, di permeabilità magnetica $\mu_r = 1000$ e di lunghezza media $L = 1.2 \text{ m}$, e da un traferro in aria, di stessa sezione, di lunghezza $l = 15 \text{ cm}$. Sulla parte in ferro sono avvolte $N = 2000$ spire percorse da una corrente costante $I = 100 \text{ A}$. Nel traferro è posta una spira quadrata di resistenza $R = 20 \text{ } \Omega$ con i lati di lunghezza d che si fa ruotare con velocità angolare costante $\omega = 50 \text{ rad/s}$ intorno ad un asse parallelo a due dei lati e passante per il centro del traferro come indicato in figura.

Si determini:

- il campo magnetico nel traferro supponendolo uniforme sulla sezione,
- la f.e.m. indotta nella spira,
- il momento meccanico da applicare all'asse della spira per tenerlo in rotazione ad ω costante.

(si trascuri l'autoinduzione della spira e il suo effetto sul circuito magnetico)



Soluzione 1

a)

Applicando il teorema di Gauss su superfici sferiche centrate nel centro dei conduttori si può facilmente ricavare il campo elettrico in funzione di r , distanza dal centro:

$r < R_1$ $E=0$ campo nullo all'interno di un conduttore

$$R_1 < r < R_2 \quad 4\pi r^2 E_0 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$R_2 < r < R_3$ $E=0$ campo nullo all'interno di un conduttore
(all'interno della superficie sferica la somma delle cariche è nulla)

$$R_3 < r < R_3 + d \quad 4\pi r^2 D = 2q \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2}$$

$$r > R_3 + d \quad 4\pi r^2 E_0 = \frac{2q}{\epsilon_0} \quad E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

b)

Il vettore intensità di polarizzazione all'interno del dielettrico è:

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E} = \chi\epsilon_0 E \hat{r}$$

Le densità di carica di polarizzazione sulle superfici del dielettrico sono:

$$\sigma_{P_{R_3}} = -\vec{P} \cdot \hat{r} = -\frac{\chi}{2\pi\epsilon_r} \frac{q}{R_3^2} = -0.255 \cdot \text{mC/cm}^2$$

$$\sigma_{P_{R_3+d}} = \vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_r} \frac{q}{(R_3 + d)^2} = 0.075 \cdot \text{mC/cm}^2$$

e integrando sulle superfici sferiche si trovano le cariche di polarizzazione:

$$Q_{P_{R_3}} = -2q \frac{\chi}{\epsilon_r} = -32 \text{ mC} \quad Q_{P_{R_3+d}} = 2q \frac{\chi}{\epsilon_r} = 32 \text{ mC}$$

c)

Il valore del potenziale si può ricavare dall'integrale del campo elettrico da R_1 a infinito. In alternativa il sistema può essere schematizzato come una serie di tre condensatori sferici, come indicato in figura, con capacità:

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 0.74 \text{ pF} \quad C_3 = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_3(R_3 + d)}{d} = 167 \text{ pF}$$

$$C_\infty = 4\pi\epsilon_0(R_3 + d) = 16.7 \text{ pF}$$

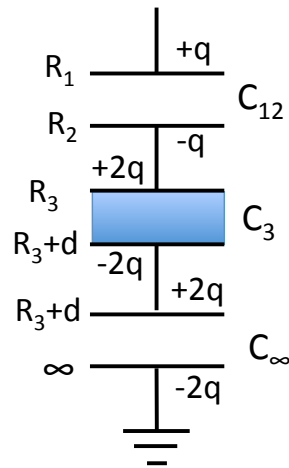
Le differenze di potenziale su questi condensatori sono:

$$\Delta V_{12} = \frac{q}{C_{12}} \quad \Delta V_3 = \frac{2q}{C_3} \quad \Delta V_\infty = \frac{2q}{C_\infty}$$

e il potenziale della sfera interna è quindi:

$$V = (\Delta V_{12} + \Delta V_3 + \Delta V_\infty) = q \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{2}{C_3} + \frac{2}{C_\infty} \right) = 3.0 \cdot 10^{10} \text{ V}$$

(Il valore del potenziale eccessivamente alto dipende dalla scelta non realistica della carica depositata.)



Soluzione 2

a)

La riluttanza magnetica del circuito composto dalla parte in ferro e dal traferro è:

$$\mathbf{R} = \frac{L}{\mu S} + \frac{l}{\mu_0 S} \quad \text{con } S = d^2$$

dalla legge di Hopkinson $NI = \mathbf{R}\Phi$ si ricava il campo induzione magnetica:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{\mu_0 \mu NI}{\mu_0 L + \mu l} = \frac{\mu NI}{L + \mu_r l} = 1.66 \text{ Tesla}$$

b)

Indicando con \hat{n} la normale alla spira, il flusso di B concatenato con la spira è:

$$\Phi_S = \vec{B} \cdot \hat{n} S = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$$

e la f_i indotta nella spira:

$$f_i = -\frac{d\Phi_S}{dt} = -BS \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -BS\omega \sin \omega t$$

c)

Il momento M da applicare all'asse della spira per mantenerla in moto a velocità angolare costante ω si può calcolare che la potenza applicata dal momento va dissipata in effetto Joule nella spira:

$$I_i^2 R = M\omega$$

$$M = \frac{I_i^2 R}{\omega} = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t$$

con:

$$M_{max} = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} = 0.7 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m} .$$

Allo stesso risultato si perviene osservando che durante il moto, sui lati della spira paralleli all'asse di rotazione sono applicate due forze di modulo $F = I_i B d$. Queste costituiscono una coppia di braccio variabile $b = d \sin \omega t$ cosicché il momento risulta:

$$M = I_i B d^2 \sin \omega t = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t$$