Prova Scritta Elettromagnetismo - 6.9.2018

(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

---

risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri una distribuzione di carica su una lastra isolante infinita, di spessore $2d$, con $d = 2.5$ mm, parallela al piano (y, z), e centrata in $x = 0$, in cui la densità di carica segua la legge $\rho = Ax$, con $A = 2.2 \cdot 10^{-2}$ C/m^4, per $-d < x < d$, e nulla nel resto dello spazio.

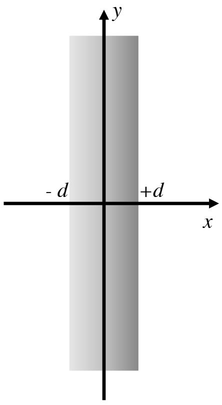
Si chiede:

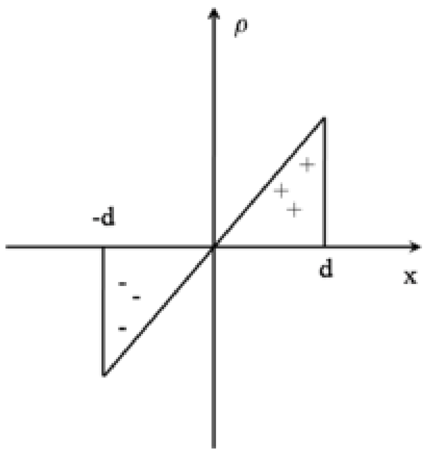
a) l'espressione del campo elettrico in tutto lo spazio, graficando l'andamento in funzione della distanza dal piano $x = 0$;

b) il valore del campo elettrico nell'origine (in modulo, direzione e verso);

c) il valore della differenza di potenziale ΔV tra le due facce della lastra;

d) il valore dell'energia elettrostatica per unità di superficie della lastra.





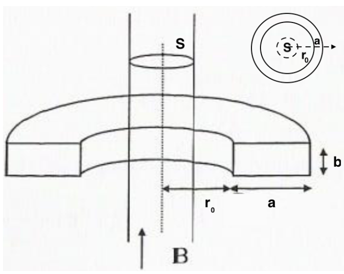
Esercizio 2

In una regione di spazio cilindrica di sezione $S = 0.40$ m^2 e altezza da considerare indefinita, è presente un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ uniforme, parallelo all'asse del cilindro, e variabile nel tempo con legge $\mathbf{B} = \alpha t/\tau + \beta$ per $0 < t < \tau$, con $\alpha = 1.5\,\mathrm{T}$, e $\tau = 10\,\mathrm{s}$. Un conduttore ohmico toroidale di raggio interno $r_0 = 2.0\,\mathrm{m}$ e sezione rettangolare di altezza $b = 0.1\,\mathrm{m}$ e base $a = 0.2\,\mathrm{m}$, è posto in posizione coassiale alla regione di spazio in cui è presente il campo magnetico. Sapendo che la conducibilità elettrica del materiale ohmico è $\sigma = 2\pi \cdot 10^6\,(\Omega\mathrm{m})^{-1}$, e trascurando fenomeni di autoinduzione, determinare:

a) il campo elettrico all'interno del conduttore toroidale;

b) la densità di corrente (specidicandone direzione e verso) e la corrente che percorre il conduttore;

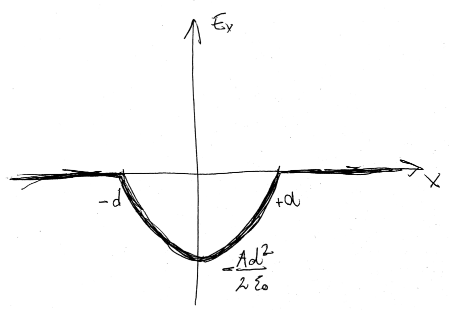
c) l'energia dissipata per effetto Joule nel conduttore nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$.



Soluzione
Esercizio 1
a) al di fuori della lastra il campo elettrico deve essere nullo, infatti la lastra può essere considerata come una sequenza di doppi strati piani e paralleli con carica opposta.
Per calcolare il campo internamente alla lastra possiamo utilizzare il teorema di Gauss, applicato ad una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse x, una base in posizione $x < d$ (fuori dalla lastra, dove il campo ǹullo) e una base in posizione x interna alla lastra. Dal teorema di Gauss in forma integrale, abbiamo che

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-d}^{x} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx \\ &= \int_{-d}^{x} \frac{Ax}{\varepsilon_0} dx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0} A(x^2 - d^2) \end{aligned}$$

Per simmetria, il campo ha solo componente x.
In figura il grafico della componente E_x del campo, in funzione di x:



b) nell'origine, la componente x del campo vale:

$$E_x = -\frac{Ad^2}{2\varepsilon_0} = -7.8 \text{ kV/m}$$

c) la differenza di potenziale tra le facce della lastra si calcola come

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int_{-d}^{+d} E_x dx \\ &= -\int_{-d}^{+d} \frac{1}{2\varepsilon_0} A(x^2 - d^2) dx \\ &= -\frac{A}{2\varepsilon_0} \left(\int_{-d}^{+d} x^2 dx - \int_{-d}^{+d} d^2 dx \right) \\ &= \frac{2A}{3\varepsilon_0} d^3 = 25.9 \text{ V} \end{aligned}$$

c) La densità di energia elettrostatica vale:

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$

L'energia per unità si superficie della lastra si calcola integrando solo in dx:

$$\begin{aligned}
\frac{U}{S} &= \int_{-d}^{+d} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dx \\
&= \int_{-d}^{+d} \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{A^2}{4\varepsilon_0^2} (x^2 - d^2)^2 dx \\
&= \frac{A^2}{8\varepsilon_0} \int_{-d}^{+d} \left(x^4 + d^4 - 2d^2x^2\right) dx \\
&= \frac{2A^2}{15\varepsilon_0} d^5 = 7.1 \cdot 10^{-7} \text{ J/m}^2
\end{aligned}$$

Esercizio 2

a)

Applicando la versione integrale (legge di FN) della seconda equazione di Maxwell ad un cammino circolare di raggio r:

$$E 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} = -S\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{\alpha S}{\tau}$$

$$E = \frac{\alpha S}{2\pi\tau}\frac{1}{r}.$$

Le linee di forza del campo sono cerchi centrati sull'asse del sistema, e il campo è diretto in verso orario, in modo che la corrente indotta generi un campo magnetico che si oppone alla variazione del campo magnetico (legge di Lenz).

b)

Per la legge di Ohm locale: $J = \sigma E$, diretta su cerchi centrati sull'asse del sistema, in verso orario.

Integrando la densità di corrente sulla sezione S del toro :

$$I = \int J \cdot dS = \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{\alpha\sigma S}{2\pi\tau}\frac{1}{r} b dr = \frac{\alpha\sigma S b}{2\pi\tau} \ln\frac{r_0+a}{r_0} = 572 \text{ A}$$

c)

La potenza dissipata per unità di volume vale $J \cdot E$, quindi la potenza dissipata è data da:

$$\begin{aligned}
P &= \int d\tau J \cdot E = \int d\tau \sigma E^2 = \sigma\left(\frac{\alpha S}{2\pi\tau}\right)^2 \int_{r_0}^{r_0+a} \frac{1}{r^2} b 2\pi r dr = \frac{\sigma\alpha^2 S^2 b}{2\pi\tau^2} \ln\frac{r_0+a}{r_0}; \\
U &= P \cdot \tau = \frac{\sigma\alpha^2 S^2 b}{2\pi\tau} \ln\frac{r_0+a}{r_0} = 343 \, \text{J}
\end{aligned}$$