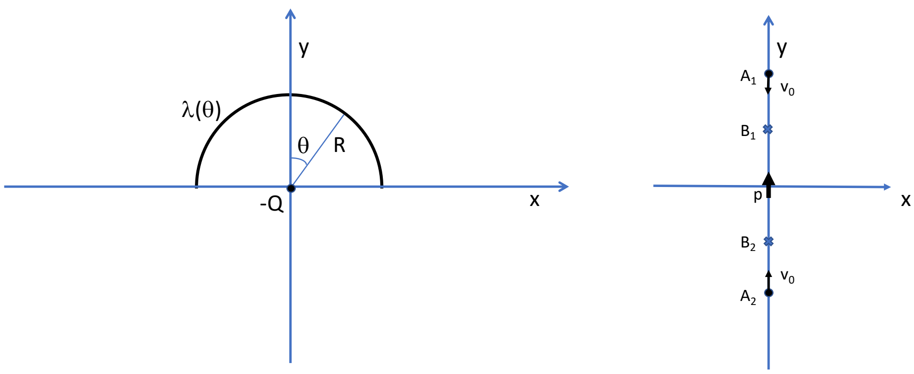
Prova Esonero Elettromagnetismo - 16.04.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

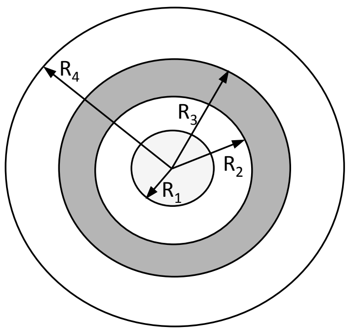
Esercizio 1

Un filo di sezione trascurabile è disposto a forma di semicerchio con raggio R=10 cm ed è elettricamente carico secondo la distribuzione $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos(\theta)$, dove θ è l'angolo definito in figura. La carica totale disposta sul filo è Q=10 nC. Una carica puntiforme negativa $-Q$ è posta all'origine del sistema di coordinate come mostrato nella parte sinistra della figura.
Si chiede di determinare:
a) il valore della costante λ_0;
b) il modulo la direzione e il verso della forza che agisce sulla carica $-Q$;
c) il momento di dipolo elettrico complessivo $\vec{P}$ del sistema.
Due protoni ($m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg e $q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C) sono collocati rispettivamente nella due posizioni simmetriche A_1=(0,D) e A_2=(0,-D) con $D = 5.0$ m e sono entrambi dotati di velocità iniziale $v_0 = 2 \times 10^4$ m/s diretta verso l'origine del sistema di coordinate come rappresentato nella parte destra della figura.
Trascurando l'interazione tra i protoni, si determinino:
d) le velocità $v_{1,2}$ con cui i due protoni raggiungono rispettivamente i punti B_1 e B_2 di coordinate (0,$\pm D/2$).



Esercizio 2

Una sfera conduttrice di raggio $R_1 = 5.0$ cm, sulla quale è depositata una carica $Q_1 = 1.5$ nC, è circondata da uno strato di dielettrico di raggio interno $R_2 = 10$ cm e raggio esterno $R_3 = 15$ cm. Il dielettrico è caratterizzato da una suscettività che è funzione della distanza radiale dal centro $\chi(r) = (\alpha r^2 - 1)$ con $\alpha = 0.1 \times 10^4$ m^{-2}. Il sistema descritto è poi circondato da una superficie conduttrice sferica di raggio $R_4 = 20$ cm sulla quale è depositata una carica $Q_4 = 4.0$ nC.
Si determinino:
a) il campo elettrico in funzione della distanza dal centro del sistema facendone un grafico;
b) le cariche di polarizzazione nel dielettrico (densità di carica e cariche totali);
c) il potenziale elettrostatico della sfera conduttrice interna;
d) la forza per unità di superficie sulla superficie sferica di raggio R_4.



Soluzione 1

a) L'integrale della distribuzione di carica su tutto il semicerchio deve uguagliare la carica totale:

$$Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda(\theta) R d\theta = \lambda_0 R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = 2\lambda_0 R$$

da cui ricaviamo:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{2R} = 5 \times 10^{-8} \mathrm{C/m}$$

b) Per motivi di simmetria l'unica componente della forza non nulla è quella lungo l'asse y che possiamo esprimere come il prodotto della carica $-Q$ per il modulo del campo elettrico in quel punto esercitato dalla carica positiva distribuita sul semicerchio:

$$\begin{aligned} F_y &= -QE_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda(\theta) R d\theta \frac{-\cos\theta}{R^2} = \frac{Q\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{Q\lambda_0}{8\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{16\epsilon_0 R^2} = 7.1 \times 10^{-5} \mathrm{N} \end{aligned}$$

La forza è diretta lungo l'asse y e il suo verso è positivo, coerentemente con il fatto che la forza deve necessariamente essere di tipo attrattivo.
c) Il momento di dipolo elettrico è pure diretto come l'asse y dalla carica negativa a quella positiva e dunque il suo verso è positivo. Utilizziamo direttamente la definizione di momento di dipolo elettrico ($y = R\cos\theta$):

$$p_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y\lambda(\theta) R d\theta = \lambda_0 R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\lambda_0 R^2 = \frac{\pi}{4} QR = 7.8 \times 10^{-10} \ \mathrm{C\,m}$$

d) Il protone proveniente dall'alto e da una distanza $D >> R$ e viene rallentato dall'azione del campo del dipolo. Viceversa quello che proviene dal basso viene accelerato. In entrambi i casi scriviamo la conservazione dell'energia meccanica, utilizzando per l'energia potenziale il prodotto della carica q_p del protone per il potenziale dovuto al dipolo elettrico situato nell'origine dato da:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

da cui ricaviamo i valori dei potenziali nelle 4 posizioni rilevanti (A_1, A_2, B_1 e B_2):

$$\begin{aligned} V(A_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_y}{D^2} \\ V(A_2) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_y}{D^2} \\ V(B_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4p_y}{D^2} \\ V(B_2) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4p_y}{D^2} \end{aligned}$$

Le equazioni di conservazione dell'energia meccanica si scrivono pertanto nei due casi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_p v_1^2 &= \frac{1}{2} m_p v_0^2 - \frac{q_p 3 p_y}{4\pi\epsilon_0 D^2} \\ \frac{1}{2} m_p v_2^2 &= \frac{1}{2} m_p v_0^2 + \frac{q_p 3 p_y}{4\pi\epsilon_0 D^2} \end{aligned}$$

da cui ricaviamo i valori delle velocità:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{v_0^2 - \frac{3 q_p p_y}{2\pi\epsilon_0 m_p D^2}} = 1.55 \times 10^4 \mathrm{m/s} \\ v_2 &= \sqrt{v_0^2 + \frac{3 q_p p_y}{2\pi\epsilon_0 m_p D^2}} = 2.36 \times 10^4 \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Soluzione 2

a)

Iniziamo calcolando il vettore spostamento elettrico $\vec{D} = D\,\hat{r}$:

$$r < R_1 \qquad D = 0$$

$$R_1 < r < R_4 \qquad D = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_1}{r^2}$$

$$r > R_4 \qquad D = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_1 + Q_4}{r^2}$$

Da qui il campo elettrico $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$:

$$r < R_1 \qquad E_0 = 0$$

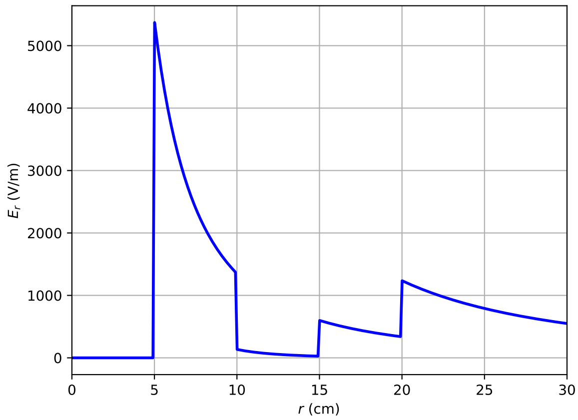
$$R_1 < r < R_2 \qquad E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

$$R_2 < r < R_3 \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\alpha r^2}\frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\alpha}\frac{Q_1}{r^4}$$

$$R_3 < r < R_4 \qquad E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

$$r > R_4 \qquad E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 + Q_4}{r^2}$$

Il grafico è:



b)

Il vettore intensità di polarizzazione $\vec{P} = P\hat{r}$ è non nullo solo dentro il dielettrico:

$$P(r) = \epsilon_0\chi(r)E(r) = \epsilon_0(\alpha r^2 - 1)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\alpha}\frac{Q_1}{r^4} = \frac{\alpha r^2 - 1}{4\pi\alpha}\frac{Q_1}{r^4}$$

sulla superficie a $r = R_2$:

$$\sigma_{P2} = \vec{P}(R_2)\cdot(-\hat{r}) = -P(R_2) = -\frac{\alpha R_2^2 - 1}{4\pi\alpha}\frac{Q_1}{R_2^4} = -10.7 \text{ nC/m}^2$$

$$Q_{P2} = 4\pi R_2^2\,\sigma_{P2} = -\frac{\alpha R_2^2 - 1}{\alpha}\frac{Q_1}{R_2^2} = -1{,}35 \text{ nC}$$

sulla superficie a $r = R_4$:

$$\sigma_{P3} = \vec{P}(R_3)\cdot(\hat{r}) = P(R_3) = \frac{\alpha R_3^2 - 1}{4\pi\alpha}\frac{Q_1}{R_3^4} = 5.07 \text{ nC/m}^2$$

$$Q_{P3} = 4\pi R_3^2\,\sigma_{P3} = \frac{\alpha R_3^2 - 1}{\alpha}\frac{Q_1}{R_3^2} = 1{,}43 \text{ nC}$$

all'interno del dielettrico:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 P(r)\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{Q_1}{4\pi\alpha}\left(\frac{\alpha}{r^2} - \frac{1}{r^4}\right)\right] = -\frac{Q_1}{2\pi\alpha}\frac{1}{r^5}$$

$$Q_{PV} = \int_{R_2}^{R_3} \rho_P \, 4\pi r^2 \, dr = -4\pi \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q_1}{2\pi\alpha}\frac{1}{r^3}\, dr = -\frac{Q_1}{\alpha}\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2}\right) = -0,08 \text{ nC}$$

Si verifica facilmente:

$$Q_{P1} + Q_{P2} + Q_{PV} = 0$$

c)

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$V(R_2) - V(R_3) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\alpha}\int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{r^4}\, dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3\alpha}\left[\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_3^3}\right]$$

$$V(R_3) - V(R_4) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_3}^{R_4} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right]$$

$$V(R_4) - V(\infty) = V(R_4) = \frac{Q_1 + Q_4}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_4}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q_1 + Q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_4}$$

$$V(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{3\alpha}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_3^3}\right) + \frac{1}{R_3}\right] + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_4} = 401 \text{ V}$$

Allo stesso risultato si può arrivare vedendo il sistema come una serie di quattro condensatori dopo aver calcolato la capacità di un condensatore con armature a R_2 e R_3 comprendente il dielettrico dalla d.d.p. $V(R_2) - V(R_3)$:

$$C_{23} = \frac{Q_1}{V(R_2) - V(R_3)} = \frac{12\pi\alpha\epsilon_0}{\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_3^3}}$$

sapendo:

$$C_{12} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R - 1} \qquad C_{34} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_3 R_4}{R_4 - R_3} \qquad C_{4\infty} = 4\pi\epsilon_0 \, R_4$$

d)

La forza per unità di superficie si può calcolare valutando la pressione elettrostatica sulla superficie di raggio R_4 al suo interno e all'esterno:

$$p_{int} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \, E_{0\,int}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{Q_1^2}{R_4^4} = \frac{1}{32\,\pi^2\epsilon_0}\frac{Q_1^2}{R_4^4}$$

$$p_{est} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \, E_{0\,est}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{(Q_1 + Q_4)^2}{R_4^4} = \frac{1}{32\,\pi^2\epsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_4)^2}{R_4^4}$$

$$\frac{F}{S} = p_4 = p_{est} - p_{int} = \frac{1}{32\,\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{R_4^4}\left[(Q_1 + Q_4)^2 - Q_1^2\right] = 6.3 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

verso l'esterno.

In alternativa la forza complessiva sulla superficie conduttrice 4 si può anche trovare derivando l'energia elettrostatica. Questa si può calcolare integrando la densità di energia oppure come la somma delle energie elettrostatiche di quattro condensatori in serie:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_{12}} + \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_{23}} + \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_{34}} + \frac{1}{2}\frac{(Q_1 + Q_4)^2}{C_{4\infty}}$$

dove interessano solo i termini con R_4:

$$F = -\frac{dU}{dr}|_{r=R_4} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{Q_1^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0}\frac{r - R_3}{R_3\, r} + \frac{(Q_1 + Q_4)^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]|_{r=R_4}$$

$$F = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_4^2}\left[(Q_1 + Q_4)^2 - Q_1^2\right]$$

$$\frac{F}{S} = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{R_4^4}\left[(Q_1 + Q_4)^2 - Q_1^2\right]$$