Prova Esonero Elettromagnetismo - 07.05.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

È data una sfera di raggio R=10 cm, carica con densità non uniforme e ben approssimata dalla relazione $\rho(r) = \alpha/r$ con $\alpha = 1.3 \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$ (si assuma costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1$). Intorno alla sfera e concentrico con essa, è posto un conduttore sferico cavo metallico di raggi interno ed esterno rispettivamente R_1=18 cm ed R_2=20 cm sul quale è posta una carica Q=1.4 nC.

Si ricavi:

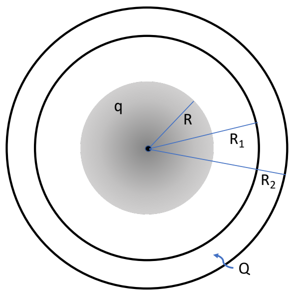
a) la carica totale q contenuta nella sfera;

b) l'espressione del campo elettrico del sistema in funzione della distanza r dal centro della sfera, disegnandone il grafico;

c) le densità di carica σ_1, σ_2 presenti sulle superfici (interna ed esterna) dell'involucro metallico;

d) il valore del potenziale V_0 al centro della sfera.

e) Stabilire inoltre se un protone ($m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg e $q_p = 1.6 \times 10^{-19}$ C) posto a grandissima distanza dal sistema e dotato di una velocità iniziale diretta verso il centro della sfera pari a $v_0 = 2.0 \times 10^5$ m/s raggiunge o meno la superficie esterna dell'involucro metallico.



Esercizio 2

Un condensatore sferico ha le armature di raggi $r_1 = 5.0$ cm e $r_2 = 10.0$ cm, e tra di esse c'è il vuoto. Inizialmente il condensatore è scarico e all'istante $t = 0$ l'armatura interna viene collegata elettricamente attraverso un filo, che passa in un forellino nell'armatura esterna, a una resistenza R connessa a un generatore di tensione costante $V_0 =$ 2000 V come in figura.

Si calcoli:

a) come varia il campo elettrico tra le armature del condensatore in funzione della posizione e del tempo;

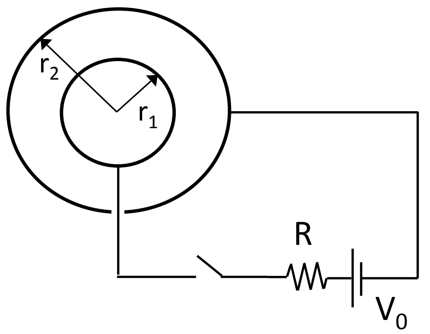
b) la densità di corrente di spostamento in funzione della posizione e del tempo.

Considerata una piccola superficie cilindrica di raggio ρ intorno alla parte di filo che si estende da r_1 a r_2 tra le armature del condensatore, si determini nell'approssimazione di filo di lunghezza infinita:

c) il vettore di Poynting sulla superficie cilindrica, di raggio ρ, in funzione r e t;

d) il flusso del vettore di Poynting in funzione del tempo attraverso la superficie cilindrica di raggio ρ;

e) l'integrale del flusso del vettore di Poynting dal tempo iniziale al tempo infinito confrontandolo con l'energia elettrostatica del condensatore carico.



Soluzione 1

a) Per ottenere la carica totale contenuta nella sfera integriamo la sua densità di carica nota su tutta la sfera:

$$q = \int \rho d\tau = \int_0^R \frac{\alpha}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi\alpha R^2 = 8.2 \times 10^{-10} C \tag{1}$$

b) Calcoliamo il campo in funzione del raggio r applicando il teorema di Gauss nelle 4 diverse zone del sistema. In tutte le zone il campo ha direzione radiale e ne determiniamo appunto la componente radiale in funzione del raggio r.

$r < R$

$$2\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \frac{\alpha}{r'} 4\pi r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \alpha 4\pi r' dr' = \frac{2\pi\alpha}{\epsilon_0} r^2$$

$$E(r) = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{2}$$

$R < r < R_1$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3}$$

$R_1 < r < R_2$

$$E(r) = 0 \tag{4}$$

$r > R_2$

$$E(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{5}$$

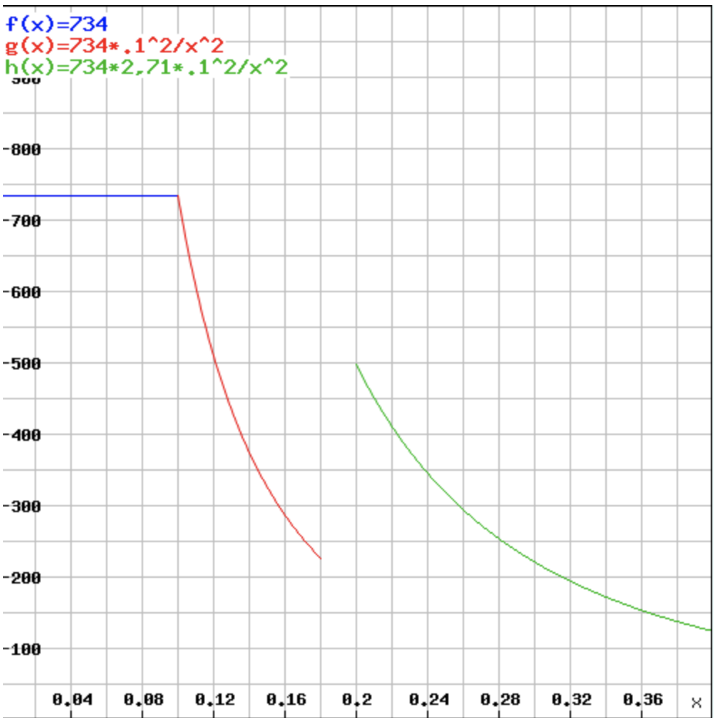


Figure 1: Esercizio 1 campo $E(r)$ (V/m) in funzione di r (m)

c) Essendo la sfera e l'involucro metallico in condizioni di induzione completa, sulla parete interna del conduttore deve disporsi una carica pari a $-q$ e di conseguenza, sulla parete esterna andrà a disporsi una carica complessiva pari a $q + Q$. Pertanto le densità di carica sulle due superfici del conduttore saranno:

$$\sigma(R_1) = -\frac{q}{4\pi R_1^2} = -2 \times 10^{-9} C/m^2 \tag{6}$$

$$\sigma(R_2) = \frac{q+Q}{4\pi R_2^2} = 4.4 \times 10^{-9} C/m^2 \tag{7}$$

d) Il potenziale al centro del sistema può essere determinato sfruttando la definizione di potenziale come integrale del campo elettrico. Assumiamo che il potenziale si annulli a raggio infinito:

$$V_0 = \int_0^\infty E(r)dr = \int_0^R \frac{\alpha}{2\epsilon_0} dr + \int_R^{R_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^\infty \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \tag{8}$$

Svolgendo i singoli integrali si perviene al seguente risultato:

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2}{R} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_2} = 206V \tag{9}$$

e) Perchè il protone raggiunga la superficie esterna del sistema, la sua energia cinetica iniziale deve essere almeno uguale alla sua energia potenziale sulla superficie esterna dell'involucro, che è pari al prodotto della sua carica per il potenziale ad $r = R_2$. Deve essere cioè:

$$\frac{1}{2} m_p v_0^2 > q_p V(R_2) = q_p \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{10}$$

La condizione è soddisfatta perchè i due membri valgono rispettivamente 3.4×10^{-17} J e 1.6×10^{-17} J, dunque sí, il protone raggiunge l'involucro metallico.

Soluzione 2

a)

La capacità del condensatore sferico vale

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Per la carica $Q(t)$ sull'armatura interna del condensatore al potenziale $V(t)$ possiamo scrivere:

$$dQ = C\, dV = \frac{V_0 - V(t)}{R}\, dt$$

$$\frac{dV}{V_0 - V(t)} = \frac{dt}{\tau} \qquad \tau = RC$$

che integrata dà:

$$V(t) = V_0\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

La carica sul condensatore è quindi:

$$Q(t) = CV_0\ (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = Q_f\ (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad Q_f = CV_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0$$

e il campo elettrico tra le armature è quindi:

$$E(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{CV_0}{r^2}\ (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{V_0}{r^2}\ (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$E(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_f}{r^2}\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

b)

La densità di corrente di spostamento è:

$$J_S(r,t) = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q_f}{r^2}\ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

c)

La corrente che scorre nel filo vale

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_f}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Il campo magnetico intorno al filo a distanza ρ è:

$$2\pi\rho\, B(\rho) = \mu_o I(t) \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Il vettore di Poynting è:

$$\vec{S}(\rho, r, t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{1}{2\pi\rho r^2}\frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}\hat{k}$$

con direzione e verso $\hat{k}$ uscenti dal filo percorso da corrente.
d)
Il suo flusso attraverso la superficie cilindrica è:

$$\Phi(\vec{S}) = 2\pi\rho \int_{r_1}^{r_2} S\, dr = 2\pi\rho \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{1}{2\pi\rho}\frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

quindi

$$\Phi(\vec{S}) = \frac{V_0^2}{R}(1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}$$

e)
e il suo integrale sul tempo da 0 a infinito è:

$$\int_0^\infty \Phi(S)\, dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty (1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau}\, dt = \frac{V_0^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2 = 22.3\ \mu\text{J}$$

pari all'energia elettrostatica finale presente nel condensatore.