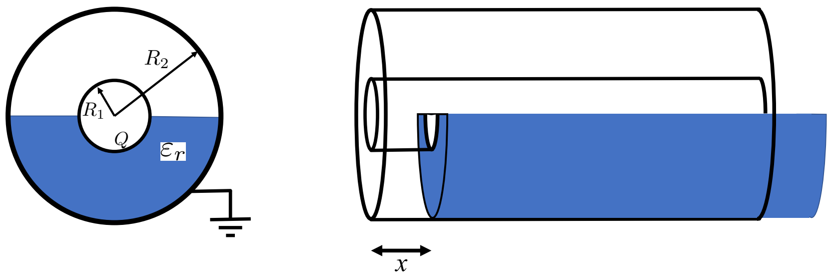
Prova Scritta di Elettromagnetismo - 26.06.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.
Per recuperare la prima prova di esonero, risolvere il primo esercizio in 1 ora e 30 minuti.
Per recuperare la seconda prova di esonero, risolvere il secondo esercizio in 1 ora e 30 minuti.

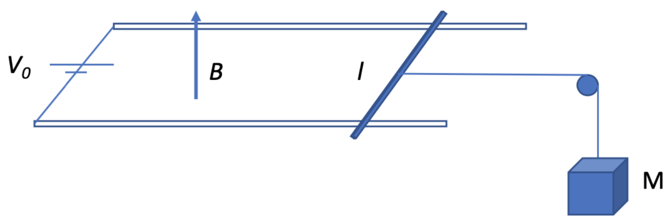
Esercizio 1

Un condensatore cilindrico di raggio interno $R_1 = 3.0\,\text{cm}$, raggio esterno $R_2 = 9.0\,\text{cm}$, e lunghezza $L = 44\,\text{cm}$ è riempito per metà con un materiale dielettrico rigido di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 5$, come in figura. Il condensatore è caricato con carica $Q = 5.0\,\text{nC}$. Nell'approssimazione di cilindro di lunghezza $L \gg R_2$ si calcoli:
a) l'andamento dei campi $\vec{E}$ e $\vec{D}$ in funzione della distanza r dall'asse del cilindro, nella zona occupata dal dielettrico e nella zona vuota, specificando i valori per $r = 6.0\,\text{cm}$;
b) la densità delle cariche localizzate sulla superficie interna, nel tratto a contatto con il dielettrico e nel tratto senza dielettrico;
c) la densità delle cariche di polarizzazione nel dielettrico;
d) l'energia elettrostatica del sistema;
e) l'espressione della forza necessaria per estrarre il dielettrico lungo l'asse del cilindro, in funzione della lunghezza del tratto estratto x, calcolandone il valore per $x = L/2$.



Esercizio 2

Una barra conduttrice di lunghezza $l = 30\,\text{cm}$, massa $m = 28\,\text{g}$ e resistenza R, è appoggiata su due rotaie conduttrici di resistenza trascurabile collegate ad un generatore di forza elettromotrice costante $V_0 = 25\,\text{V}$. Il circuito, posto su un piano orizzontale, è immerso in un campo di induzione magnetica ad esso perpendicolare e diretto verso l'alto di intensità uniforme $B = 0.5\,\text{T}$. La barra è collegata tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile ad un corpo di massa $M = 16\,\text{g}$ come in figura. All'istante $t = 0$ la barra viene lasciata libera di muoversi.
a) Si determini per quale valore di resistenza R_0 la barra resta ferma.
Si consideri quindi il caso $R = 1.1 \times R_0$ e si determinino, trascurando l'autoinduzione del circuito:
b) l'andamento della velocità della barra in funzione del tempo, il valore asintotico della velocità e la costante di tempo del sistema;
c) l'andamento della corrente del circuito in funzione del tempo e il valore asintotico della corrente;
d) la potenza erogata dal generatore, quella dissipata per effetto Joule e quella della forza peso nelle condizioni di moto asintotiche. Si mostri la consistenza del bilancio energetico.



Soluzione 1
a) il campo elettrostatico deve essere ortogonale alla superficie del conduttore interno in ogni punto; inoltre, nel passaggio dal dielettrico al vuoto, la componente tangente del campo elettrico non cambia. Quindi il campo elettrostatico all'interno del condensatoreè lo stesso nel dielettrico e nel vuoto, ed è sempre radiale:

$$E_r = E_{0,r}.$$

Lo spostamento D elettrico invece è discontinuo.

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$
$$D_0 = \varepsilon_0 E_0$$

Eguagliando $E = E_0$, si ottiene:

$$D = \varepsilon_r D_0$$

Applicando il teorema di Gauss il presenza di dielettrici ad una superficie cilindrica di raggio r:

$$\Phi(D) = Q$$

troviamo

$$\pi r L D + \pi r L D_0 = Q$$

da cui

$$\pi r L \varepsilon_0 \varepsilon_r E + \pi r L \varepsilon_0 E = Q$$

e

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)\pi L r}\hat{r}$$

sia nel vuoto che nel dielettrico. Il campo è nullo per $r < R_1$ e $r > R_2$.

Il campo D è anch'esso radiale, e vale

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L r}\hat{r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L r}\hat{r}$$

In particolare per $r = 6\,\mathrm{cm}$

$$E = 1.1\,\mathrm{kV/m}$$
$$D_0 = 10\,\mathrm{nC/m^2}$$
$$D = 50\,\mathrm{nC/m^2}$$

b) La densità di carica localizzata si può ricavare dal teorema di Coulomb: $\vec{D} = \sigma \hat{n}$, dove σ è la carica superficiale. Si ha quindi, nel tratto senza dielettrico

$$\sigma_0 = D_0(R_1) = \frac{1}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L R_1} = 20\,\mathrm{nC/m^2}$$

e nel tratto con dielettrico

$$\sigma = D(R_1) = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L R_1} = 100\,\mathrm{nC/m^2}$$

c) Il dielettrico è omogeneo e non ci sono cariche localizzate al suo interno, quindi la carica di polarizzazione di volume è nulla

$$\rho_P = 0$$

Per il calcolo delle cariche polarizzazione superficiali calcoliamo il vettore polarizzazione all'interno del dielettrico:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L r}\hat{r}$$

Possiamo calcolare le cariche di polarizzazione superficiali come:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}_d$$

In prossimità dell'armatura interna

$$\sigma_{P,1} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L R_1} = -80\,\mathrm{nC/m^2}$$

e dell'esterna

$$\sigma_{P,2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\frac{Q}{\pi L R_2} = 27\,\mathrm{nC/m^2}$$

d) Possiamo notare che il sistema è equivalente a due condensatori semicilindrici in parallelo, di capacità

$$C_1 = \frac{\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \qquad C_2 = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}$$

e capacità totale

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)L}{\ln(R_2/R_1)}$$

L'energia totale vale quindi

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2\ln(R_2/R_1)}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)L} = 0.19 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

In alternativa, è possibile calcolare l'energia come integrale di volume del della densità di energia elettrostatica

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

pervenendo allo stesso risultato.

e) Quando il dielettrico è parzialmente estratto, per una lunghezza x, il sistema è equivalente a 3 condensatori in parallelo:

$$C_1 = \frac{\pi\varepsilon_0(L - x)}{\ln(R_2/R_1)} \qquad C_2 = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(L - x)}{\ln(R_2/R_1)} \qquad C_3 = \frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(R_2/R_1)}$$

La capacità totale vale quindi

$$C(x) = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{\pi\varepsilon_0((\varepsilon_r + 1)(L - x) + 2x)}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}((\varepsilon_r + 1)L - (\varepsilon_r - 1)x)$$

La forza di risucchio vale

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}\right) = +\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}(\varepsilon_r - 1)$$

sostituendo la capacità $C(x)$ si ha che la forza di risucchio vale

$$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{Q^2(\varepsilon_r - 1)}{\pi\varepsilon_0}\frac{\ln(R_2/R_1)}{((\varepsilon_r + 1)L - (\varepsilon_r - 1)x)^2}$$

La forza per estrarre il dielettrica vale quindi

$$F_{\mathrm{ext}}(x) = -F(x) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\ln(R_2/R_1)}{((\varepsilon_r + 1)L - (\varepsilon_r - 1)x)^2}$$

Per $x = L/2$ si ha

$$F_{\mathrm{ext}}(x = L/2) = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\ln(R_2/R_1)}{((\varepsilon_r + 1)L - (\varepsilon_r - 1)L/2)^2} = \frac{2(\varepsilon_r - 1)Q^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{\ln(R_2/R_1)}{((\varepsilon_r + 3)L)^2} = 6.37 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

Soluzione 2

a) All'istante t=0 nel circuito circola in senso orario la corrente dovuta al generatore di tensione V_0:

$$i_0 = \frac{V_0}{R}$$

La forza magnetica che agisce sulla barra dovuta a tale corrente è opposta a quella dovuta alla tensione del filo ed è pari a:

$$F_M = -i_0 lB = \frac{V_0 lB}{R}$$

Pertanto si ha equilibrio tra le due forze per quel valore di resistenza R_0 per cui vale la condizione:

$$T = \frac{V_0 lB}{R_0}$$

dove T è la tensione del filo, che nel caso statico è data da:

$$T = Mg$$

La condizione di equilibrio risulta essere pertanto verificata se

$$R_0 = \frac{V_0 lB}{Mg} = 23.9\Omega$$

b) Scriviamo le equazioni del circuito e quella del moto, rispettivamente nelle variabili $i(t)$ e $v(t)$.
Scriviamo prima l'equazione del circuito prendendo come verso positivo della corrente quello orario:

$$V_0 - \frac{d\phi}{dt} = Ri(t)$$

$$V_0 - \frac{d\phi}{dt} = Ri(t)$$
$$V_0 + lBv(t) = Ri(t) \tag{1}$$

Il segno della forza elettromotrice indotta risulta essere positivo per la legge di Lenz. Infatti per valori positivi della velocità, la corrente indotta deve scorrere in senso orario.
Per l'equazione del moto dobbiamo tenere conto sia del moto della barra che di quello del peso in caduta.

$$\begin{aligned} m\frac{dv_{barra}(t)}{dt} &= T - i(t)lB \\ M\frac{dv_{peso}(t)}{dt} &= Mg - T \end{aligned}$$

Essendo il filo inestensibile, la velocità dei due corpi sono le stesse: $v_{barra}(t) = v_{peso}(t) = v(t)$. Ricavando T dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima si ottiene:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{Mg}{m+M} - \frac{i(t)lB}{m+M} \tag{2}$$

La (1) e la (2) forniscono nel complesso un sistema di due equazioni differenziali in due incognite, $i(t)$ e $v(t)$. Ricaviamo $i(t)$ dalla (1) e sostituiamo nella (2).

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{Mg}{m+M} - \frac{V_o lB}{(m+M)R} - \frac{l^2B^2}{(m+M)R}v(t) = \alpha - \beta v(t)$$

La cui soluzione del tipo:

$$v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$$

in cui:

$$\begin{aligned} v_{lim} &= \frac{\alpha}{\beta} = \frac{MgR - V_0 lB}{l^2B^2} = 16.7\ m/s \\ \tau &= \frac{1}{\beta} = \frac{(m+M)R}{l^2B^2} = 51.5\ s \end{aligned}$$

c) Sostituiamo ora la $v(t)$ appena ottenuta nell'equazione (1) e ricaviamo $i(t)$:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} + \frac{Mg}{lB}(1 - e^{-t/\tau})$$

da cui

$$i_{lim} = \frac{Mg}{lB} = 1.04A$$

d) Le potenze a regime sono date da:

$$\begin{aligned}
W_{gen} &= V_0 i_{lim} = \frac{V_0 M g}{lB} = 26.2W \\
W_{diss} &= R i_{lim}^2 = \frac{R M^2 g^2}{l^2 B^2} = 28.8W \\
W_{grav} &= T v_{lim} = M g v_{lim} = \frac{R M^2 g^2}{l^2 B^2} - \frac{V_0 M g}{lB} = 2.6W
\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che

$$W_{gen} + W_{grav} = W_{diss}$$

per cui tutta la potenza fornita alla barretta dal generatore e dal peso in caduta finiscono dissipati in effetto Joule.