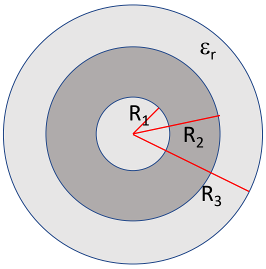
Prova Scritta di Elettromagnetismo - 03.09.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

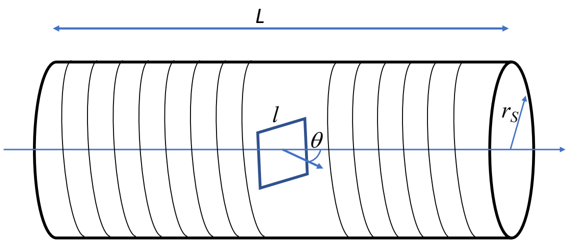
Esercizio 1

Si consideri una sfera di raggio $R_3 = 8.0\,\mathrm{cm}$, interamente riempita con un dielettrico omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.5$. Una distribuzione di carica di densità $\rho(r) = \alpha/r$ è localizzata in un guscio sferico concentrico alla sfera ed interno ad essa di raggi interno ed esterno rispettivamente $R_1 = 3.0\,\mathrm{cm}$ ed $R_2 = 6.0\,\mathrm{cm}$. La variabile r rappresenta la distanza dal centro comune del guscio sferico e della sfera, e $\alpha = 3.2 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$ è una costante.
Si calcoli:
a) la carica totale localizzata sul guscio sferico;
b) il campo elettrico in funzione di r;
c) le densità di cariche di polarizzazione di superficie e di volume;
d) le cariche di polarizzazione di superficie e di volume.



Esercizio 2

Un solenoide con $N = 1000$ spire, di lunghezza $L = 3.0\,\mathrm{m}$ e sezione circolare di raggio $r_S = 10\,\mathrm{cm}$, è percorso da una corrente costante $I_S = 10\,\mathrm{A}$. Un circuito elettrico approssimabile ad una spira quadrata di lato $l = 2.0\,\mathrm{cm}$ e resistenza complessiva $R = 3.0\,\Omega$ si trova all'interno del solenoide come in figura. Sia $\theta = 30°$ l'angolo tra l'asse del solenoide e la normale al circuito. Si chiede di calcolare:
a) il coefficiente di mutua induzione M_{SC} tra solenoide e circuito.
Ad un certo istante di tempo la corrente nel solenoide, fino a quel momento costante, prende a diminuire esponenzialmente con una costante di tempo $\tau = 10\,\mathrm{s}$.
Considerando trascurabile l'autoinduzione del circuito, si chiede di calcolare:
b) l'andamento nel tempo della corrente indotta $I_C(t)$ sul circuito e il suo valore massimo $I_C^{\max}$;
c) il momento meccanico $\vec{M}$ che agisce sul circuito in funzione del tempo e il suo valore massimo $M^{\max}$;
d) la quantità di carica elettrica Q_C complessivamente transitata in una qualsiasi sezione del circuito nel corso della diminuzione della corrente;
e) trascurando la presenza del circuito, il flusso Φ_P del vettore di Poyting attraverso la superficie del solenoide e il suo valore integrato nel tempo U_P.



Soluzione 1

a) Otteniamo la carica totale localizzata integrando la distribuzione di carica sul volume del guscio nel quale è contenuta.

$$Q = \int_{guscio} \rho d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{4\pi\alpha r^2}{r} dr = 2\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2) = 5.4nC$$

b) Consideriamo le diverse regioni di r e applichiamo in ciascuna di esse il teorema di Gauss al vettore spostamento dielettrico $\vec{D}$ che è ovunque, per ragioni di simmetria, radiale, e pertanto ne consideriamo soltanto la componente radiale $D(r)$.
Nella regione più interna ($r < R_1$):

$$r < R_1 : \qquad D(r) = 0$$

Quindi, per $R_1 < r < R_2$:

$$R_1 < r < R_2 : \qquad 4\pi r^2 D(r) = \int_{R_1}^{r} \frac{4\pi\alpha r'^2}{r'} dr' = 2\pi\alpha(r^2 - R_1^2)$$

da cui ricaviamo:

$$R_1 < r < R_2 : \qquad E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\alpha(r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{\alpha}{2\epsilon_0\epsilon_r}\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right)$$

Per $R_2 < r < R_3$

$$R_2 < r < R_3 : \qquad 4\pi r^2 D(r) = Q = 2\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2)$$

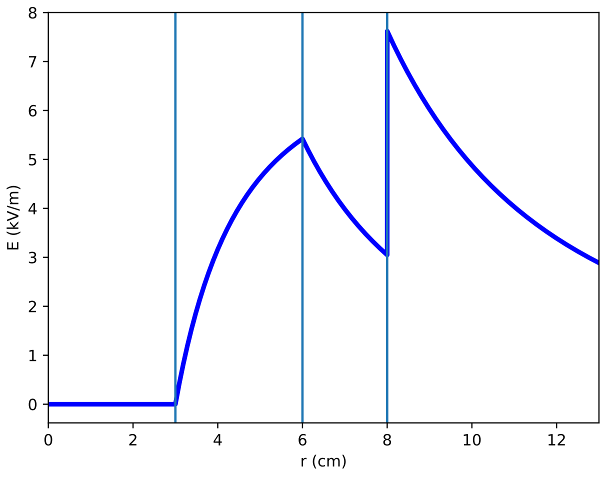
da cui ricaviamo:

$$R_2 < r < R_3 : \qquad E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\alpha(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0\epsilon_r}\frac{1}{r^2}$$

Infine, oltre la sfera dielettrica ($r > R_3$) si ha:

$$r > R_3 : \qquad E(r) = \frac{\alpha(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

In figura si riporta l'andamento del campo elettrostatico.



c) Per determinare la densità delle cariche di polarizzazione, calcoliamo il vettore intensità di polarizzazione $\vec{P}$ in funzione di r a partire dal campo $\vec{E}$ che abbiamo appena calcolato. Cosí come il campo $\vec{E}$, il campo $\vec{P}$ è pure, per ragioni di simmetria, radiale e pertanto ne determiniamo direttamente la componente radiale $P(r)$.

$$\begin{aligned}
r < R_1 : P(r) &= 0 \\
R_1 < r < R_2 : P(r) &= \frac{\alpha}{2}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\Big(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\Big) \\
R_2 < r < R_3 : P(r) &= \frac{\alpha}{2}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r^2} \\
r > R_3 : P(r) &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Si ha una densità di cariche di polarizzazione sulla superficie di separazione tra la sfera di dielettrico e il vuoto. Avremo pertanto:

$$\sigma_p(R_3) = \frac{\alpha}{2}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\Big(\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_3^2}\Big) = 4.05 \times 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$$

Per valutare la presenza di eventuali cariche di polarizzazione di volume all'interno del guscio sferico e nel resto dello spazio, dobbiamo calcolare la divergenza del vettore P nelle varie regioni di r.
Vediamo subito che si ottiene un risultato nullo sia nelle regioni $r < R_1$ e $r > R_3$ dove $P = 0$, che nella regione $r > R_2$ dove l'andamento di P con r è comunque di tipo r^{-2} ed è pertanto caratterizzato da divergenza nulla.
Resta da vedere dunque cosa succede nella regione $R_1 < r < R_2$. Dato che, come detto $\vec{P}$ ha diversa da zero solo la componente radiale, utilizziamo la divergenza in coordinate sferiche limitandoci al solo termine con la derivata rispetto ad r.
Otteniamo pertanto:

$$\rho_p = -div\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\alpha}{2}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}(r^2 - R_1^2)\Big) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{\alpha}{r}$$

Troviamo quindi una densità di carica di polarizzazione nel volume tra R_1 e R_2 con un andamento che segue quello della carica libera di volume ma con segno opposto e ridotto in modulo del fattore $(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r$.

$$\rho_p = -\rho(r)\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$$

d) Dobbiamo integrare le due densità di carica.
La carica Q_S sulla superficie esterna della sfera è data dal semplice prodotto della sua densità per la superficie:

$$Q_S = \sigma_p(R_3)4\pi R_3^2 = 2\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2)\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = Q\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = 3.2\,\mathrm{nC}$$

La carica Q_V sul volume del guscio è data dall'integrale di volume della densità ρ_p precedentemente calcolata:

$$Q_V = \int \rho_p d\tau = -\alpha\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\int_{R_1}^{R_2} 4\pi r dr = -2\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2)\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = -Q\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = -3.2\,\mathrm{nC}$$

Complessivamente la carica di polarizzazione totale Q_p, sarà data dalla somma della carica di polarizzazione sulla superficie esterna della sfera e di quella complessiva di volume. Notiamo che si ha

$$Q_p = Q_S + Q_V = 0$$

come atteso la carica totale di polarizzazione è nulla.

Soluzione 2

a) Per determinare il coefficiente di mutua induzione M_{SC} calcoliamo il flusso ϕ_C del campo magnetico B_S generato dal solenoide quando è percorso dalla corrente I_S, attraverso il circuito:

$$\Phi_C(B_S) = M_{SC} I_S$$

Si ha:

$$\Phi_C(B_S) = \mu_0 \frac{N}{L} I_S l^2 \cos\theta$$

da cui ricaviamo:

$$M_{SC} = \frac{\Phi_C(B_S)}{I_S} = \mu_0 \frac{N}{L} l^2 \cos\theta = 1.45 \times 10^{-7}\,\mathrm{H}$$

b) A partire dall'istante di inizio della diminuzione di corrente, $t = 0$, la corrente che percorre le spire del solenoide è data da:

$$I_S(t) = I_S e^{-t/\tau}$$

Otteniamo la corrente indotta $I_C(t)$ sul circuito applicando la legge di Faraday-Neumann trascurando l'autoinduzione:

$$I_C(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_C}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(M_{SC} I_S e^{-t/\tau}) = \frac{M_{SC} I_S}{\tau R} e^{-t/\tau}$$

il cui valore massimo si ha all'istante iniziale ed è pari a:

$$I_C^{\max} = \frac{M_{SC} I_S}{\tau R} = 48\,\mathrm{nA}$$

c) Calcoliamo il momento meccanico agente sul circuito trattandolo come un dipolo magnetico di momento $\vec{m}$ sottoposto all'azione del campo magnetico generato dal solenoide. Il momento magnetico del circuito risulta essere:

$$\vec{m} = I_C(t) l^2 \hat{n}$$

in cui con $\hat{n}$ abbiamo indicato il versore normale alla superficie del circuito.
Il momento meccanico è data da:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_S$$

diretto perpendicolarmente al piano individuato dall'asse del solenoide e dal versore $\hat{n}$. Il suo modulo dipende dal tempo ed è dato da:

$$|M| = I_C(t) l^2 B_S(t) \sin\theta = \frac{M_{SC} I_S^2 l^2 \mu_0 N \sin\theta}{\tau R L} e^{-2t/\tau}$$

Il massimo valore del momento si ha all'istante iniziale. Si ottiene:

$$|M|^{\max} = I_C(0) l^2 B_S(0) \sin\theta = \frac{M_{SC} I_S^2 l^2 \mu_0 N \sin\theta}{\tau R L} = 4.0 \times 10^{-14}\,\mathrm{Nm}$$

d) La carica totale transitata nel circuito puó essere ricavata attraverso la legge di Felici tra l'istante iniziale $t = 0$ in cui nel circuito non circola corrente e l'istante finale $t \to \infty$ in cui di nuovo non circola corrente. Nei due casi i flussi di campo magnetico concatenati con il circuito sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= l^2 B_S(0) \cos\theta \\ \phi(\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Pertanto la carica totale Q_C transitata è data da:

$$Q_C = \frac{1}{R}(\Phi(0) - \Phi(\infty)) = \frac{\mu_0 N I_S l^2 \cos\theta}{RL} = 4.83 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$$

e) Per determinare il vettore di Poynting $\vec{I}_P$ sulla superficie del solenoide dobbiamo determinare i campi elettrici e magnetici $\vec{E}_S$ e $\vec{B}_S$ che si hanno sulla superficie durante la fase di scarica del solenoide.

$$\vec{I}_P = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_S \times \vec{B}_S \tag{3}$$

Il campo $\vec{B}_S$ è parallelo all'asse del solenoide ed il suo modulo è data da:

$$B_S(t) = \mu_0 \frac{N}{L} I_S e^{-t/\tau}$$

Il campo $\vec{E}_S$ sulla superficie ci è fornito dalla legge di Faraday-Neumann applicata ad una circonferenza coincidente con una delle spire del solenoide. Assumendo per ragioni di simmetria che il campo elettrico sia in modulo uniforme lungo tale circonferenza e diretto tangenzialmente ad essa, si ha:

$$E_S(t) 2\pi r_S = -\frac{d}{dt}(B_S(t)\pi r_S^2)$$

da cui:

$$E_S(t) = \frac{\mu_0 N I_S r_S}{2L\tau} e^{-t/\tau}$$

Il vettore di Poynting è pertanto diretto in direzione radiale e con verso uscente ed ha modulo pari a:

$$I_P(t) = \left(\frac{N I_S}{L}\right)^2 \frac{\mu_0 r_S}{2\tau} e^{-2t/\tau}$$

ed il suo flusso attraverso la superficie laterale del solenoide si ottiene moltiplicando per l'area della superficie:

$$\phi_P = I_P(t) 2\pi r_S L = \frac{\pi \mu_0 (r_S N I_S)^2}{\tau L} e^{-2t/\tau}$$

L'integrale di tale flusso nel tempo da 0 ad ∞ è dato da:

$$U_P = \int_0^\infty \phi_P(t) dt = \frac{\pi \mu_0 (r_S N I_S)^2}{2L} = 0.66\,\mathrm{J}$$

Si noti che tale integrale, che ha il significato dell'energia complessivamente uscita dalle pareti del solenoide, è pari all'energia inizialmente immagazzinata nel solenoide

$$U_{in} = \frac{1}{2} L_S I_S^2$$

in cui L_S rappresenta in questo caso l'induttanza del solenoide.