Prova Scritta di Elettromagnetismo - 06.11.2020

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Un condensatore piano con le armature di superficie $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ contiene all'interno due lastre isolanti di costanti dielettriche relative $\epsilon_{r1} = 1.5$ e $\epsilon_{r2} = 3.0$, e di spessori rispettivamente $d_1 = 1.5\,\mathrm{mm}$ e $d_2 = 2.0\,\mathrm{mm}$. I due dielettrici sono separati da uno strato metallico sottile di spessore trascurabile. Il condensatore è stato a lungo connesso a un generatore di potenziale $V_0 = 1000\,\mathrm{V}$.

- Si determini:

a) il potenziale della lastra metallica;

b) il campo elettrico nei due dielettrici.

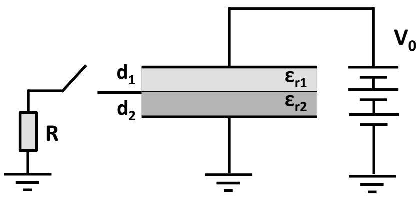
- Al tempo $t = 0$ lo strato metallico viene connesso a massa attraverso una resistenza $R = 10\,\mathrm{M\Omega}$.

Si determini:

c) il lavoro L_G del generatore fino al nuovo stato stazionario;

d) l'energia U_R dissipata nella resistenza;

e) come varia in funzione del tempo la corrente nella resistenza.



Esercizio 2

Una spira conduttrice quadrata di lato $l = 10\,\mathrm{cm}$ e resistenza complessiva $R = 10\,\Omega$ è immersa in un campo magnetico uniforme di induzione magnetica $B = 0.52\,\mathrm{T}$. La spira è vincolata a ruotare intorno ad un asse fisso ortogonale alla direzione del campo come in figura. Sia θ l'angolo tra la direzione del campo magnetico e la normale alla spira. La spira è tenuta in rotazione con velocità angolare costante pari a $\omega = 12.4$ rad/s.

Si determini:

a) il valore assoluto della carica elettrica che transita per la spira nel corso di metà giro tra le posizioni $\theta = 0$ e $\theta = \pi$;

b) il momento meccanico esterno necessario per mantenere la spira in rotazione, e il suo valore medio in un giro;

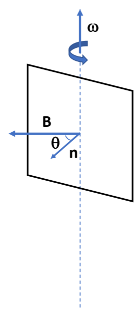
c) il lavoro fatto da tale momento meccanico in un giro;

d) l'energia dissipata sulla spira in un giro.

Si supponga ora che il sistema sia circondato da un solenoide da considerarsi ideale, con asse parallelo al campo B precedente, e con numero di spire per unità di lunghezza $n = 1000\,\mathrm{cm}^{-1}$.

e) Derivare l'espressione della fem in funzione del tempo, indotta sul solenoide dalla corrente che scorre nella spira quadrata, calcolando il suo valore massimo $fem_{\max}$ e il valore della sua frequenza.

Si trascuri l'autoinduzione nella spira. Si ricordi la relazione $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

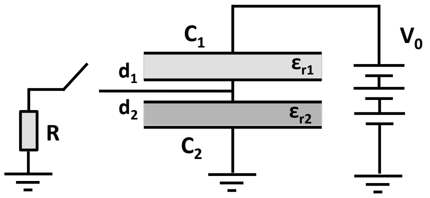


Soluzione 1

a) Il sistema è una serie di due condensatori come in figura con capacità:

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1} = 88.5 \text{ pF} \qquad C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2} = 132.8 \text{ pF} \qquad C_{ser} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 53.1 \text{ pF}$$

Chiamiamo V il potenziale sul condensatore C_2 e $Q = C_{ser} V_0$ la carica sulla serie di condensatori. Ne segue:



$$V = \frac{Q}{C_2} = \frac{1}{C_2} C_{ser} V_0 = \frac{1}{C_2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V_0 = 400 \text{ V}$$

Oppure:

$$V = E_2 d_2 = \frac{D d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \qquad V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left(\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right) \frac{D_0}{\epsilon_0}$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\dfrac{d_2}{\epsilon_{r2}}}{\left(\dfrac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \dfrac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right)} = \frac{\epsilon_{r1} d_2}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2} \qquad V = \frac{\epsilon_{r1} d_2}{\epsilon_{r2} d_1 + \epsilon_{r1} d_2} V_0 = 400 \text{ V}$$

b) Il vettore spostamento $\vec{D}$ all'interno del condensatore piano ha modulo $D = \sigma = Q/S$, ne segue:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 S} = 400 \text{ kV/m} \qquad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 S} = 200 \text{ kV/m}$$

c) Per $t \to \infty$ si ha $V = 0$ e sul condensatore C_1 si ha la carica $Q' = C_1 V_0$. Il generatore deve portare sul condensatore una carica $\Delta Q = Q' - Q$ e quindi fa un lavoro:

$$L_G = (Q' - Q) V_0 = (C' - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}) V_0^2 = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} V_0^2 = 35.4 \ \mu\text{J}$$

d) L'energia U_R dissipata nella resistenza è pari al lavoro del generatore meno la variazione di energia elettrostatica ΔU_{es}:

$$\Delta U_{es} = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 - \frac{1}{2} C_{ser} V_0^2 = \frac{1}{2} (C_1 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}) V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} V_0^2 = \frac{1}{2} L_G$$

$$\Rightarrow \qquad U_R = L_G - \Delta U_{es} = \frac{1}{2} L_G = 17.7 \ \mu\text{J}$$

e) La carica sulla lamina è $Q = -Q_1 + Q_2$ come in figura, inoltre possiamo scrivere le relazioni:

$$V_0 - V = \frac{Q_1}{C_1} \qquad V = \frac{Q_2}{C_2} \qquad I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R}$$

e risolvendo il sistema:

$$-\frac{d}{dt}[-C_1(V_0 - V) + C_2 V] = \frac{V}{R} \qquad -(C_1 + C_2) \frac{dV}{dt} = \frac{V}{R}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dt}{\tau} \qquad V(t) = V_{in} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = R(C_1 + C_2) = 2.21 \text{ ms}$$

con V_{in} il potenziale iniziale della lamina trovato in precedenza al punto **a)**. Ne segue un andamento esponenziale:

$$I(t) = \frac{C_1}{R(C_1 + C_2)} V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Integrando la potenza dissipata nella resistenza $W_R(t) = I^2 R$ dal tempo $t = 0$ al tempo infinito si ritrova il risultato visto in **d)**.

Soluzione 2

a) Sulla spira in rotazione agisce la forza elettromotrice indotta dovuta al campo magnetico. La corrente che circola nella spira è variabile nel tempo ed è data dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz. Assumendo che all'istante $t = 0$ la spira si trovi nella posizione $\theta = 0$, si ha:

$$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(Bl^2\cos\omega t) = \frac{Bl^2\omega}{R}\sin\omega t$$

Tale corrente, nel primo mezzo giro, circola in senso anti-orario guardando la spira dal lato della sua normale. Per determinare il valore della carica $Q_{1/2}$ che transita nel primo mezzo giro del moto, integriamo la corrente nel tempo tra l'istante $t = 0$ corrispondente alla posizione $\theta = 0$ e il tempo $t = \pi/\omega$ corrispondente alla posizione $\theta = \pi$.

$$Q_{1/2} = \int_0^{\pi/\omega} I(t)dt = \frac{Bl^2\omega}{R}\int_0^{\pi/\omega}\sin\omega t dt = 2\frac{Bl^2}{R} = 1.04\,\mathrm{mC}$$

Si noti che è possibile pervenire allo stesso risultato applicando la legge di Felici tra la posizione iniziale $\theta = 0$ e quella finale $\theta = \pi$:

$$Q_{1/2} = \frac{1}{R}(\phi_i - \phi_f) = \frac{2Bl^2}{R} = 1.04\,\mathrm{mC}$$

b) Perché il moto abbia luogo a velocità angolare costante, occorre che dall'esterno vi sia un momento meccanico in grado di bilanciare il momento resistente dato dalle forze magnetiche sui lati della spira. Si tratta di un momento sempre diretto parallelamente all'asse intorno a cui ruota la spira e con lo stesso verso del vettore ω (verso l'alto in figura). Calcoliamo il modulo di tale momento resistente uguagliandolo al momento resistente ottenuto considerando le forze uguali e contrarie che agiscono sui lati verticali della spira e moltiplicandole per il braccio:

$$|M(t)| = |M_B(t)| = |I(t)lBl\sin\omega t| = \frac{B^2l^4\omega}{R}\sin^2\omega t$$

Che come si vede è sempre positivo. Per determinare il momento medio in un giro, integriamo la funzione $M(t)$ tra $t = 0$ e $t = T = 2\pi/\omega$ e dividiamo per il periodo T. Si ha:

$$\overline{M} = \frac{1}{T}\int_0^T M(t)dt = \frac{B^2l^4\omega^2}{2\pi R}\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t dt = \frac{B^2l^4\omega}{2R} = 1.7\times10^{-5}\,\mathrm{Nm}$$

c) Il lavoro compiuto dal momento esterno in un giro puó essere ottenuto esprimendo il momento in funzione dell'angolo θ e integrandolo in $d\theta$ tra $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

$$L_M = \int_0^{2\pi} M(\theta)d\theta = \frac{B^2l^4\omega}{R}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{\pi B^2l^4\omega}{R} = 1.05\times10^{-4}\,\mathrm{J}$$

Si puó notare facilmente che a tale risultato si poteva pervenire semplicemente moltiplicando per 2π il valore medio del modulo del momento nel giro.

d) Per ottenere l'energia dissipata sulla spira in un giro, integriamo la potenza dissipata per effetto Joule.

$$E_{diss} = \int_0^{2\pi/\omega} I^2(t)Rdt = \frac{B^2l^4\omega^2}{R^2}R\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t dt = \frac{\pi B^2l^4\omega}{R}$$

Come previsto otteniamo lo stesso risultato che abbiamo ottenuto per il lavoro fatto dal momento meccanico esterno. Tutto il lavoro fatto dal momento esterno finisce dissipato per effetto Joule.

e) La fem indotta sul solenoide è dovuta alla variazione del flusso del campo magnetico prodotto dalla corrente che circola nella spira quadrata. Ricordando che il coefficiente di mutua induzione è simmetrico, $\mathcal{M}_{1,2} = \mathcal{M}_{2,1}$, dato un angolo θ è possibile calcolare la mutua induzione della spira sul solenoide come la mutua induzione del solenoide sulla spira:

$$\mathcal{M}(\theta) = B_{\text{solenoide}}l^2\cos(\theta)/I_{\text{solenoide}} = \mu_0 nl^2\cos(\theta)$$

tenendo conto del fatto che la mutua induzione dipende dall'angolo θ e quindi dal tempo, la fem vale

$$fem = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}(\mathcal{M}I(t)) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 nl^2\cos(\omega t)\frac{Bl^2\omega}{R}\sin(\omega t)\right)$$

ricordando che $\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)/2$

$$fem = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 nl^2Bl^4\omega}{R}\frac{\sin(2\omega t)}{2}\right) = -\frac{\mu_0 nBl^4\omega^2}{R}\cos(2\omega t)$$

Il valore massimo della fem vale

$$fem_{\max} = \frac{\mu_0 n B l^4 \omega^2}{R} = 100\,\mu\mathrm{V}$$

e la sue frequenza vale

$$f_{fem} = \frac{2\omega}{2\pi} = 3.95\,\mathrm{Hz}$$