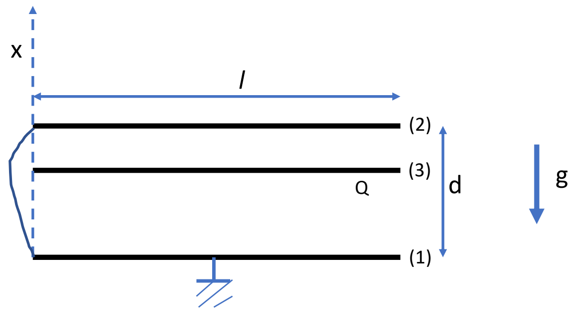
Prova Scritta di Elettromagnetismo - 01.02.2021

(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

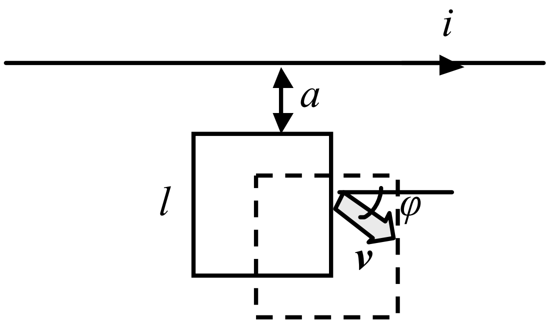
Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Due lastre conduttrici quadrate di lato $l = 10\,\text{cm}$, (1) e (2) in figura, sono mantenute parallele a distanza $d = 5.0\,\text{mm}$ e sono collegate elettricamente tra di loro e con la massa. Una terza lastra identica alle due precedenti, (3) in figura, viene caricata con una carica $Q = 0.18\,\mu\text{C}$ e viene inserita tra le due lastre parallelamente ad esse. La lastra (3) può muoversi verticalmente e si indichi con x la posizione della lastra (3) rispetto alla (1) come in figura.
Si chiede di determinare in funzione di x e numericamente nel caso specifico $x = d/2$, le seguenti grandezze.
a) La capacità complessiva del sistema.
b) Il potenziale a cui si porta la lastra (3).
c) Le densità di carica sulle facce dei diversi conduttori.
d) L'energia complessiva del sistema.
Se la si lascia libera di muoversi lungo x, tenendo conto della presenza della forza peso, si trova che la lastra (3) rimane sospesa in una condizione di equilibrio instabile in corrispondenza della posizione $x = (3/4)d$.
e) Determinare la massa della lastra (3).



Esercizio 2
All'istante t=0 un filo rettilineo indefinito, percorso da una corrente di intensità i, e una spira quadrata di lato l =40.0 cm e resistenza R=12.0 Ω, sono disposti come in figura. Si calcoli:
a) per una distanza a =15.0 cm tra il filo ed il lato più vicino della spira, l'intensità massima della corrente $I(t)$ indotta nella spira e poi il suo valore e il verso di percorrenza al tempo t =16 ms se la corrente nel filo varia con la legge $i = i_0 \cos \omega t$ con i_0=25.0 A e $\omega = 350$ rad s^{-1};
b) l'intensità massima e il verso di percorrenza della corrente indotta nella spira quando l'intensità di corrente ha valore costante i_0 ma la spira si allontana dal filo muovendosi di moto traslatorio, con la velocità v_0=1.50 m/s che forma un angolo $\varphi = \pi/6$ con il filo, a partire dal tempo t=0 quando il lato più vicino si trova a distanza a.
c) Si ricavi l'espressione del coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti in entrambi i casi a) e b) dandone il valore numerico nel primo caso.
d) Con riferimento al caso b) si determini la forza, in funzione del tempo, che deve essere applicata alla spira per mantenerla alla velocità costante.



Soluzione 1

a) Il sistema delle tre lastre risulta essere equivalente al parallelo tra i due condensatori costituiti rispettivamente dalle due intercapedini (1)-(3) e (3)-(2). In corrispondenza del generico valore di x, la capacità totale sarà dunque la somma delle capacità C_1 e C_2 dei due condensatori:.

$$C(x) = C_1(x) + C_2(x) = \frac{\epsilon_0 l^2}{x} + \frac{\epsilon_0 l^2}{d-x} = \frac{\epsilon_0 l^2 d}{x(d-x)}$$

Nel caso $x = d/2$ la capacità risulta pari al suo valore minimo:

$$C(d/2) = \frac{4\epsilon_0 l^2}{d} = 7.1 \times 10^{-11} F$$

b) Considerando che le lastre (1) e (2) sono ambedue a massa, utilizziamo per il potenziale la relazione che lo lega alla carica totale del sistema di due condensatori che è nota e pari a Q:

$$V(x) = \frac{Q}{C(x)} = \frac{Qx(d-x)}{\epsilon_0 l^2 d}$$

che nel caso $x = d/2$ risulta pari al suo valore massimo:

$$V(d/2) = \frac{Qd}{4\epsilon_0 l^2} = 2540V$$

c) La carica Q presente sulla lastra (3) si divide in due parti $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente sulle facce inferiore e superiore. In corrispondenza di queste, compariranno cariche $-q_1(x)$ e $-q_2(x)$ rispettivamente sulle lastre (1) e (2). Le due cariche devono soddisfare le due relazioni:

$$\begin{aligned} Q &= q_1(x) + q_2(x) \\ \frac{q_1(x)}{q_2(x)} &= \frac{C_1(x)}{C_2(x)} = \frac{d-x}{x} \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema e passando alle densità di carica dividendo per l^2 il risultato, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \frac{Q(d-x)}{l^2 d} \\ \sigma_2(x) &= \frac{Qx}{l^2 d} \end{aligned} \tag{1}$$

che nel caso $x = d/2$ risultano uguali e pari a:

$$\sigma_1(d/2) = \sigma_2(d/2) = \frac{Q}{2l^2} = 9 \times 10^{-6} C/m^2$$

d) L'energia totale del sistema è data da:

$$E(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)} = \frac{Q^2 x(d-x)}{2\epsilon_0 l^2 d}$$

che nel caso $x = d/2$ risulta pari a:

$$E(d/2) = \frac{Q^2 d}{8\epsilon_0 l^2} = 2.3 \times 10^{-4} J$$

e) La lastra (3) libera di muoversi è ora soggetta all'azione di tre forze tutte dirette lungo l'asse x: la forza peso mg orientata verso il basso e le due forze attrattive F_1 ed F_2 dovute rispettivamente alle lastre (1) e (2), la prima che la attrae verso il basso la seconda che l'attrae verso l'alto. I moduli delle due forze di attrazione elettrica sono dati da:

$$\begin{aligned} F_1 &= l^2 u_{E_1} = \frac{l^2}{2}\epsilon_0 E_1^2 \\ F_2 &= l^2 u_{E_2} = \frac{l^2}{2}\epsilon_0 E_2^2 \end{aligned} \tag{2}$$

dove con u_{E_1} e u_{E_2} abbiamo indicato le densità di energia elettrostatica e con E_1 ed E_2 i campi elettrici presenti nei due condensatori. Esprimendo i campi elettrici in funzione delle densità di carica calcolate in precedenza si ottiene:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{l^2\epsilon_0}{2}\frac{\sigma_1(3/4d)^2}{\epsilon_0^2} = \frac{Q^2}{32\epsilon_0 l^2} \\ F_2 &= \frac{l^2\epsilon_0}{2}\frac{\sigma_2(3/4d)^2}{\epsilon_0^2} = \frac{9Q^2}{32\epsilon_0 l^2} \end{aligned} \tag{3}$$

All'equilibrio deve aversi:

$$mg = F_2 - F_1 = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 l^2}$$

da cui:

$$m = \frac{Q^2}{4g\epsilon_0 l^2} = 9.3mg$$

Soluzione 2

a)

Il flusso concatenato con la spira quadrata è:

$$\Phi(t) = \int_a^{a+l} B\, l\, dx = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, i(t) \log\left(\frac{a+l}{a}\right)$$

$$f(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, \omega \log\left(\frac{a+l}{a}\right)\, i_0 \sin\omega t$$

$$I(t) = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, \frac{\omega}{R} \log\left(\frac{a+l}{a}\right)\, i_0 \sin\omega t$$

$$I(t)_{max} = 75.8\ \mu\text{A} \qquad\qquad I(t = 16\ \text{ms}) = -47.8\ \mu\text{A}$$

La corrente $I(t)$ è antioraria (campo uscente dal foglio) quando $i(t)$ è crescente.
(Verso di B del filo positivo = B del filo entrante nel foglio → verso positivo della corrente nella spira = verso orario)

b)

Ai fini della variazione del flusso conta solo l'allontanamento della spira dal filo quindi interessa considerare solo la componente della velocità $v = v_0 \sin\pi/6$. Il flusso concatenato è:

$$\Phi(t) = \int_{a+vt}^{a+vt+l} B\, l\, dx = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, i_0 \int_{a+vt}^{a+vt+l} \frac{1}{x}\, dx = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, i_0\, \log\frac{a+vt+l}{a+vt}$$

e la corrente:

$$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, \frac{i_0}{R} \left\{\frac{v}{a+vt+l} - \frac{v}{a+vt}\right\} = \frac{\mu_0\, l^2}{2\pi}\, \frac{i_0}{R}\, \frac{v}{(a+vt+l)(a+vt)}$$

la corrente $I(t)$ in questo caso è positiva e gira in senso orario (visto sul foglio): la corrente indotta infatti genera un campo magnetico che compensa la diminuzione del flusso del campo del filo.

$$I(t)_{max} = I(t=0) = \frac{\mu_0\, l^2}{2\pi}\, \frac{i_0}{R}\, \frac{v}{(a+l)a} = 0.606\ \mu\text{A}$$

c) I coefficienti di mutua induzione sono:

$$M' = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, \log\left(\frac{a+l}{a}\right) = 103.9\ \text{nH}$$

$$M''(t) = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\, \log\frac{a+vt+l}{a+vt}$$

d)

La corrente nel filo esercita due forze opposte sui lati della spira ad esso paralleli dirette in direzione normale (prendiamo positiva la direzione di allontanamento): F_1 attrattiva sul lato più vicino e F_2 repulsiva su quello più lontano. La forza da applicare è opposta alla loro somma:

$$F = -[F_2 + F_1] = -[I(t)lB_2 - I(t)lB_1] = -l\,I(t)\,\frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\,\left\{\frac{1}{a+vt+l} - \frac{1}{a+vt}\right\}$$

$$F = \left(\frac{\mu_0 i_0\,l^2}{2\pi}\right)^2\,\frac{v}{R}\,\frac{1}{[(a+vt+l)(a+vt)]^2}$$

La forza applicata è nel verso dello spostamento. Il lavoro fatto dalla forza è positivo e fornisce l'energia dissipata nella resistenza.