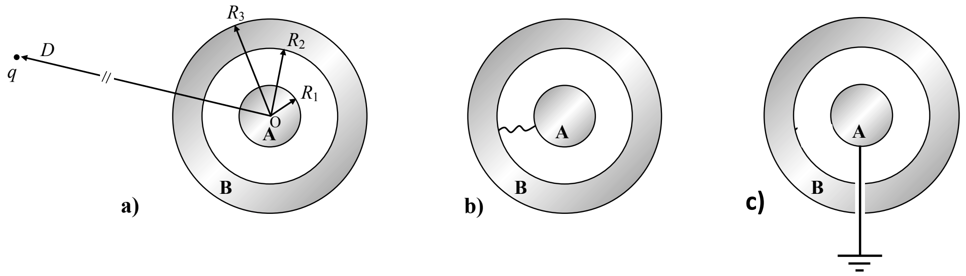
Prova Scritta di Elettromagnetismo - 12.02.2021
(a.a. 2019/20, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

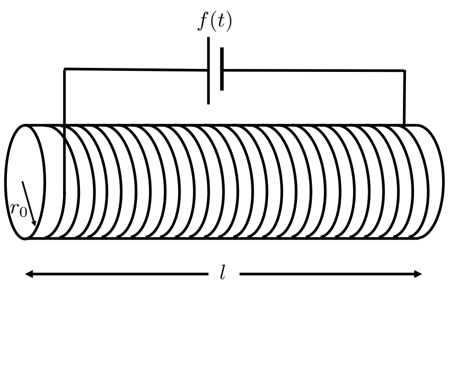
Esercizio 1

Su un conduttore sferico A di raggio $R_1 = 40$ cm è depositata una quantità di carica Q_A. Il conduttore A è posto al centro di una calotta sferica conduttrice B di raggio interno $R_2 = 50$ cm e raggio esterno $R_3 = 70$ cm. Sulla superficie esterna di B è depositata una quantità di carica Q_B. Sia $V(R_1) - V(R_2) = 4.5 \cdot 10^3$ V la differenza di potenziale tra i conduttori A ed B e sia $F = 1.5 \cdot 10^{-6}$ N l'intensità della forza repulsiva a cui è sottoposta una carica di prova $q = 1.3 \cdot 10^{-10}$ C posta all'esterno del sistema a distanza $d = 2.0$ m dal suo centro O (vedi figura a)). I conduttori sono isolati.
- Assumendo che la presenza della carica q non alteri la distribuzione delle cariche sui conduttori, determinare:
a) il valore della quantità di carica presente sulle superfici di ciascuno dei due conduttori;
b) il potenziale del conduttore B rispetto al potenziale nullo all'infinito;
- Se la superficie di A e quella interna di B vengono collegate tra loro da un filo conduttore (figura b)), si determini:
c) la variazione di energia elettrostatica del sistema dei due conduttori tra dopo e prima il collegamento.
- Se la connessione tra A e B viene rimossa e poi il conduttore A è connesso a massa (figura c)), si determinino:
d) il nuovo potenziale del conduttore B;
e) le cariche presenti sulle superfici di raggi R_2 e R_3.



Esercizio 2

Al tempo $t = 0$ un generatore di forza elettromotrice dipendente dal tempo con legge $f = k \cdot t$ ($k = 0.25\,\mathrm{Vs}^{-1}$) viene applicato ad un solenoide cilindrico di $N = 4000$ spire di resistenza trascurabile, avente lunghezza $l = 1.4\,\mathrm{m}$ e raggio $r_0 = 3.0\,\mathrm{cm}$. Nell'approssimazione di solenoide indefinito, si determini:
a) l'espressione in funzione del tempo della corrente i che passa nel solenoide e del campo di induzione magnetica B al suo interno, specificandone i valori numerici al tempo $t = 1.4\,\mathrm{s}$;
b) il campo elettrico E in funzione della distanza r dall'asse del solenoide, all'interno e all'esterno del solenoide stesso, specificandone direzione e verso;
c) il vettore di Poynting I in funzione del tempo e della distanza r dall'asse (specificandone direzione e verso);
d) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del solenoide, e l'energia totale U entrata nel solenoide, entrambi in funzione del tempo, calcolandone i valori numerici al tempo $t = 1.4\,\mathrm{s}$ (trascurare gli effetti di bordo).



Soluzione 1
Nel seguito viene data la soluzione più semplice schematizzando il sistema con condensatori ma si possono trovare gli stessi risultati calcolando il campo elettrico e poi le energie dalla densità di energia.

a)
Le superfici di raggi R_1 e R_2 costituiscono le armature di un condensatore sferico di capacità C_{AB} con carica Q_A su superficie a R_1 e carica indotta $-Q_A$ a R_2. Sulla superficie a raggio R_3 si trova quindi una carica $Q_B + Q_A$ che determina il potenziale all'interno della superficie di raggio R_3.
La capacità del condensatore sferico è:

$$C_{AB} = 4\pi\epsilon_0 \, \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

La d.d.p. tra le sue armature è:

$$V_{AB} = \frac{Q_A}{C_{AB}} = V(R_1) - V(R_2)$$

ne segue:

$$Q_A = C_{AB} \left[V(R_1) - V(R_2) \right] = 4\pi\epsilon_0 \, \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[V(R_1) - V(R_2) \right] = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Sulla superficie a R_2 si trova la carica $-Q_A$ e naturalmente su quella a R_3 la carica $Q_B + Q_A$.
La forza sulla carica q è determinata dalla carica totale presente sul sistema di conduttori sferici che ai fini del campo a distanza $d > R_3$ si può considerare posizionata nel centro del sistema. La forza è quindi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\,(Q_A + Q_B)}{d^2} \qquad \rightarrow \qquad Q_B + Q_A = \frac{4\pi\epsilon_0 \, d^2}{q} F = 5.1 \cdot 10^{-6} \text{ C} \qquad Q_B = 4.1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

b)
Il potenziale del conduttore B rispetto a ∞ è determinato dalla carica totale sulla superficie a R_3. Questa è l'armatura di un condensatore verso ∞ di capacità $C_{B\infty} = 4\pi\epsilon_0 \, R_3$, quindi:

$$V_B = \frac{Q_A + Q_B}{C_{B\infty}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A + Q_B}{R_3} = 6.6 \cdot 10^4 \text{ V}$$

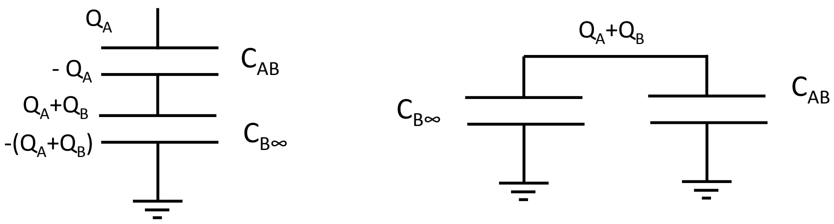


Fig. 1 Fig. 2

c)
Inizialmente si ha un sistema di due condensatori C_{AB} e $C_{B\infty}$, con le relative cariche, posti come in figura 1. L'energia elettrostatica è:

$$U_{in} = \frac{1}{2} \frac{Q_A^2}{C_{AB}} + \frac{1}{2} \frac{(Q_A + Q_B)^2}{C_{B\infty}}$$

dopo la connessione tra R_1 e R_2 si ha solo la capacità $C_{B\infty}$ con la carica totale $Q_A + Q_B$:

$$U_{fin} = \frac{1}{2} \frac{(Q_A + Q_B)^2}{C_{B\infty}}$$

segue:

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \frac{Q_A^2}{C_{AB}} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} Q_A^2 = -2.25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

d)
In questo caso abbiamo i due condensatori in parallelo come in figura 2 con una carica sull'armatura comune pari a $Q_A + Q_B$.
La capacità è:

$$C_{par} = C_{B\infty} + C_{AB} = 4\pi\epsilon_0 \, R_3 + 4\pi\epsilon_0 \, \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

e il nuovo potenziale:

$$V'_B = \frac{Q_A + Q_B}{C_{par}} = 1.7 \cdot 10^4 \text{ V}$$

e)
Le cariche presenti sulle superfici a R_2 e a R_3 sono:

$$Q(R_2) = C_{AB}\, V_B = \frac{C_{AB}}{C_{B\infty} + C_{AB}}\,(Q_A + Q_B) = 3.8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q(R_3) = C_{B\infty}\, V_B = \frac{C_{B\infty}}{C_{B\infty} + C_{AB}}\,(Q_A + Q_B) = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Soluzione 2
a)
Essendo la resistenza trascurabile l'equazione del circuito è

$$fem - L\frac{di}{dt} = 0$$

dove l'induttanza del solenoide vale

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r_0^2}{l} =$$

Da cui

$$i(t) = \frac{k}{2L}t^2 = \frac{kl}{2\mu_0 N^2 \pi r_0^2}t^2$$

Il campo di induzione magnetica interno al solenoide è uniforme, parallelo all'asse del solenoide e vale

$$B(t) = \mu_0 \frac{N}{l} i(t) = \frac{k}{2N\pi r_0^2}t^2$$

I valori numerici sono

$$i(t = 1.4\,\text{s}) = 6.0\,\text{A}$$

e

$$B(t = 1.4\,\text{s}) = 22 \times 10^{-3}\,\text{T}$$

b)
In presenza di campo magnetico variabile e in assenza di cariche localizzate il campo elettrico è un campo solenoidale. Considerata la simmetria del problema, il campo elettrico $\mathbf{E}$ è tangente a circonferenze centrate sull'asse del solenoide. Dalla III equazione di Maxwell in forma integrale $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi(\mathbf{B})/dt$, considerando circonferenze di raggio $r < r_0$ si ottiene

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}\left(\pi r^2 B\right) \implies E(r,t) = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{kt}{\pi N r_0^2}$$

per $r > r_0$ si ha

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt}\left(\pi r_0^2 B\right) \implies E(r,t) = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = -\frac{kt}{2\pi N r}$$

Il segno $-$ sta ad indicare che il campo indotto ha verso opposto al verso della corrente crescente i (legge di Lenz).
Allo stesso risultato si può arrivare dalla III e I eq di Maxwell in coordinate cilindriche, e tenendo conto che per questioni di simmetria deve le derivate $d/d\phi$ e d/dz devono essere nulle. La componente $\hat{z}$ della III eq di Maxwell in coordinate cilindriche è

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

da cui

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \implies \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} = -r\frac{\partial B_z}{\partial t} \implies d(rE_\phi) = -r\frac{\partial B_z}{\partial t}dr$$

Integrando si trova

$$rE_\phi = -\frac{r^2}{2}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

e quindi

$$E_\phi = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{kt}{2\pi N r}$$

In modo simile è possibile dimostrare che le altre componenti devono essere nulle, a meno di un campo uniforme E_z che però non può esistere per mancanza di una sorgente.

c)
Il vettore di Poynting vale

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$$

Esternamente al solenoide il campo di induzione magnetica è nullo, quindi il vettore di Poynting è nullo. Internamente al solenoide, il campo elettrico e il campo di induzione magnetica sono perpendicolari; il vettore di Poynting ha verso radiale, direzione entrante, e modulo

$$I(r,t) = \frac{|E||B|}{\mu_0} = \frac{k^2 t^3 r}{4\pi^2 \mu_0 N^2 r_0^4}$$

d)
Il flusso del vettore di Poynting, considerando segno positivo per flusso uscente, vale

$$\Phi_I(r_0,t) = -2\pi r_0 l |I(r_0,t)| = -\frac{k^2 t^3 l}{2\pi \mu_0 N^2 r_0^2}$$

L'energia entrante nel solenoide può essere calcolata in diversi modi:
- come energia del campo magnetico

$$U(t) = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi r_0^2}{l} \left(\frac{kl}{2\mu_0 N^2 \pi r_0^2} t^2 \right)^2 = \frac{k^2 l t^4}{8\mu_0 N^2 \pi r_0^2}$$

- come energia erogata dal generatore

$$U(t) = \int_0^t fem \cdot i(t') dt' = \int_0^t k t' \frac{kl}{2\mu_0 N^2 \pi r_0^2} t'^2 dt' = \frac{k^2 l}{2\mu_0 N^2 \pi r_0^2} \int_0^t t'^3 dt' = \frac{k^2 l t^4}{8\mu_0 N^2 \pi r_0^2}$$

- come integrale nel tempo del flusso del vettore di Poynting cambiato di segno (flusso entrante):

$$U(t) = \int_0^t \Phi_I(r_0,t') dt' = \int_0^t \frac{k^2 t'^3 l}{2\pi \mu_0 N^2 r_0^2} dt' = \frac{k^2 l t^4}{8\mu_0 N^2 \pi r_0^2}$$

Tutti i risultati sono coincidenti.
I valori numerici al tempo $t = 1.4\,\mathrm{s}$ sono

$$\Phi_I(t = 1.4\,\mathrm{s}) = -2.1\,\mathrm{W}$$

e

$$U(t = 1.4\,\mathrm{s}) = 0.74\,\mathrm{J}$$