Prova di Esonero Elettromagnetismo - 28.04.2022

(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri una corona circolare isolante, di spessore trascurabile e raggi interno $R_1 = 2.0\,\text{cm}$ ed esterno $R_2 = 5.0\,\text{cm}$, posta nel piano $y = 0$ e centrata nell'origine degli assi. Su di essa è distribuita carica elettrica con densità $\sigma(r,\theta) = \alpha\, r^2 \cos\theta$ con l'angolo θ misurato rispetto all'asse z. La carica totale di ciascun segno è $Q = 1.0\,\mu\text{C}$.

Si determini:

a) il valore della costante α;

b) il momento di dipolo elettrico $\vec{p}$ della corona circolare specificandone le componenti.

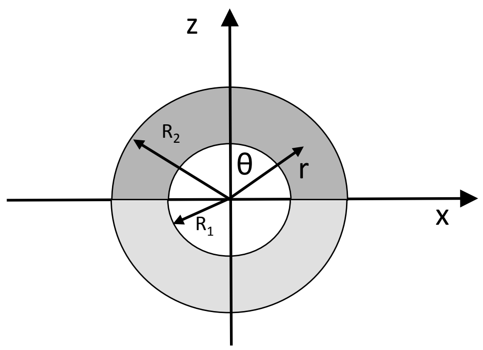
Successivamente si consideri un piccolo dipolo elettrico di momento $\vec{p}_0\,(0,0,p_0)$ con $p_0 = 1.0 \times 10^{-8}\,\text{Cm}$ che rimane nel seguito orientato come l'asse z e si trovi in approssimazione di dipolo:

c) il lavoro che si deve compiere per spostare il dipolo $\vec{p}_0$ dalla posizione $P_1\,(0,0,a)$ con $a = 50\,\text{cm}$ alla posizione $P_2\,(a,0,0)$.

Infine si calcolino le forze agenti sul dipolo $\vec{p}_0$, in modulo, direzione e verso, quando:

d) il dipolo $\vec{p}_0$ si trova nella posizione P_1;

e) il dipolo $\vec{p}_0$ si trova nella posizione P_2.



Esercizio 2

Una lastra sottile (approssimata come un piano infinito) di spessore trascurabile è caricata elettricamente con una carica superficiale $\sigma = 1.5 \times 10^{-6}\,\text{C/m}^2$. Sopra e sotto la lastra sono disposti due strati di materiale isolante, caricato con densità uniforme $\rho = 4.0 \times 10^{-6}\,\text{C/m}^3$, ciascuno di spessore $h = 16\,\text{cm}$, di costante dielettrica $\epsilon_r = 2.5$.

Si calcoli:

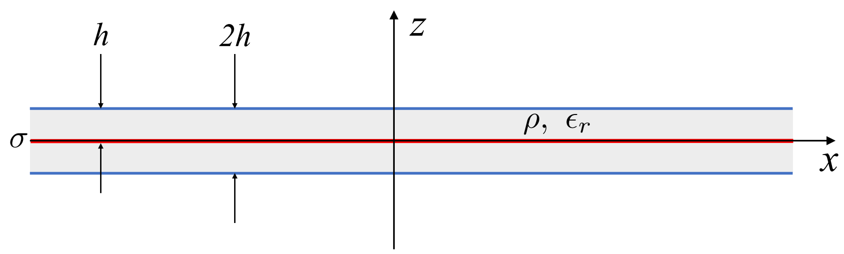
a) il campo elettrostatico in funzione della distanza dalla lastra, calcolandone i valori numerici per i punti di posizione $z_1 = 5.0\,\text{cm}$ e $z_2 = 20.0\,\text{cm}$;

b) la differenza di potenziale tra i punti z_1 e z_2, $\Delta V = V(z_1) - V(z_2)$;

c) la densità di cariche di polarizzazione volumiche ρ_p;

d) la densità di cariche di polarizzazione superficiali sulle superfici a contatto con la lastra σ_{p1} e sulle superfici a contatto con vuoto σ_{p2};

e) la densità di energia del campo elettrostatico nel punto a distanza z_1 dalla lastra.



Soluzione Esercizio 1

a)

Il valore di α è determinato dalla carica totale di ciascun segno:

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha r^2 \cos\theta \, r dr \, d\theta = \alpha \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

$$Q = \frac{\alpha}{2} \left(R_2^4 - R_1^4\right) \qquad \alpha = \frac{2Q}{R_2^4 - R_1^4} = 3.28 \cdot 10^{-1} \text{ Cm}^{-4}$$

b)

$$p_z = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r\cos\theta \, \alpha r^2 \cos\theta \, r dr \, d\theta = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \alpha r^4 \cos^2\theta \, dr \, d\theta$$

$$p_z = \alpha \int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \alpha \, \frac{1}{5}(R_2^5 - R_1^5)\, \pi = \frac{2\pi Q}{5} \, \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^4 - R_1^4} = 6.38 \cdot 10^{-8} \text{ Cm}$$

$$p_x = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r\sin\theta \, \alpha r^2 \cos\theta \, r dr \, d\theta = \int_{R_1}^{R_2} \alpha r^4 \, dr \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\sin\theta = 0$$

quindi il dipolo ha non nulla solo la componente z: $\vec{p}(0, 0, p_z)$.

c)

Il lavoro è pari alla variazione di energia potenziale del dipolo $\vec{p}_0$ tra la posizione iniziale e finale nel campo generato dal dipolo $\vec{p}$:

$$L = U_f - U_i = (-\vec{p}_0 \cdot \vec{E}(r, 0, 0)) - (-\vec{p}_0 \cdot \vec{E}(0, 0, r))$$

<u>In coordinate cartesiane.</u>

Il potenziale del dipolo è:

$$V_0(x, y, z) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e le componenti del campo elettrico sono:

$$E_{0x} = \frac{p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad E_{0y} = \frac{p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_{0z} = \frac{p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Nelle due posizioni il dipolo $\vec{p}_0$ ha componenti $(0, 0, p_0)$ quindi il lavoro è:

$$L = U_f - U_i = (-p_0 E_z(a, 0, 0)) - (-p_0 E_z(0, 0, a)) =$$

$$L = \frac{p_0 p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} + \frac{p_0 p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} = \frac{3}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{p_0 p}{a^3} = 1.38 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

d)

Le componenti della forza sul dipolo $\vec{p}_0\,(0, 0, p_0)$ da $\vec{F} = (\vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$ sono:

$$F_x = p_0 \frac{\partial}{\partial z} E_{0x} = p_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) =$$

$$F_x = \frac{3p_0 p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{x(x^2 + y^2 + z^2) - 5xz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$F_y = p_0 \frac{\partial}{\partial z} E_{0y} = \frac{3p_0 p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{y(x^2 + y^2 + z^2) - 5yz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}$$

$$F_z = p_0 \frac{\partial}{\partial z} E_{0z} = \frac{p_0 p}{4\,\pi\epsilon_0} \frac{4z(x^2 + y^2 + z^2) - 5(2z^2 - x^2 - y^2)z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}$$

in $P_1(0, 0, a)$:

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = -\frac{3p_0 p}{2\,\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^4} = -5.51 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

e)
in $P_2(a,0,0)$:

$$F_x = \frac{3p_0 p}{4\,\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^4} = 2.75\cdot 10^{-4}\ \mathrm{N} \qquad\qquad F_y = 0 \qquad\qquad F_z = 0$$

<u>In coordinate sferiche.</u>
Il potenziale generato dal dipolo $\vec{p}$ posto nell'origine è:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{p\,\cos\theta}{r^2}$$

le componenti del campo elettrico sono:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3} \qquad\qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}$$

Nel punto $P_1(r,0,0)$ il campo elettrico ha componenti:

$$\vec{E}\,\left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3},0,0\right)$$

e per il dipolo $\vec{p}_0$ si ha $\vec{p}_0(p_0,0,0)$ così si trova:

$$U_i = -\vec{p}_0\cdot\vec{E} = -\frac{p\,p_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}$$

Nel punto $P_2(r,\frac{\pi}{2},0)$ il campo elettrico ha componenti:

$$\vec{E}\,\left(0,\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3},0\right)$$

e per il dipolo $\vec{p}_0$ si ha $\vec{p}_0(0,-p_0,0)$ così si trova:

$$U_f = -\vec{p}_0\cdot\vec{E} = \frac{p\,p_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}$$

e per il lavoro:

$$L = U_f - U_i = \frac{p\,p_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3} - \left(-\frac{p\,p_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\right) = \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,p_0}{r^3} =$$

d)
Per trovare la forza sul dipolo p_0 usiamo la relazione $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}_0\cdot\vec{E})$. Diciamo p_{0r} e $p_{0\theta}$ le componenti radiale e θ di $\vec{p}_0$.
La forza su $\vec{p}_0$ è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(p_{0r}E_r + p_{0\theta}E_\theta) = \vec{\nabla}\,\left(p_{0r}\frac{p}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3} + p_{0\theta}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\right)$$

con componenti:

$$F_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(p_{0r}\frac{p}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3} + p_{0\theta}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\right) =$$
$$-\frac{3}{2\pi\epsilon_0}\frac{p_{0r}p}{r^4}\cos\theta - \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_{0\theta}\,p}{r^4}\sin\theta$$

$$F_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p_{0r}\frac{p}{2\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3} + p_{0\theta}\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3}\right) =$$
$$-\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p_{0r}p}{r^4}\sin\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_{0\theta}\,p}{r^4}\cos\theta$$

Nel punto P_1 dove $\vec{p}_0(p_0,0,0)$ e $\theta = 0$ la forza ha componenti:

$$F_r = -\frac{3}{2\pi\epsilon_0}\frac{p_{0r}\,p}{r^4} \qquad\qquad F_\theta = 0$$

e)
Nel punto P_2 dove $\vec{p}_0(0, -p_0, 0)$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ la forza ha componenti:

$$F_r = \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\,p_0}{r^4} \qquad\qquad F_\theta = 0$$

Soluzione Esercizio 2
a)
Sfruttiamo il teorema di Gauss per il vettore spostamento elettrico $\mathbf{D}$, integrando su un cilindro di superficie S e asse parallelo all'asse $\hat{z}$. Per simmetria, il vettore $\mathbf{D}$ ha solo la componente D_z e il flusso attraverso la superficie del cilindro vale

$$\Phi_{\text{cilindro}}(\mathbf{D}) = 2D_z S$$

la carica interna al cilindro vale

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \sigma S + \rho S 2z, & \text{per } |z| < h \\ \sigma S + \rho S 2h, & \text{per } |z| \geq h \end{cases}$$

dove si è tenuto conto del fatto che gli strati di materiale isolante sono 2. Si ha quindi

$$2D_z S = \begin{cases} \sigma S + \rho S 2z, & \text{per } |z| < h \\ \sigma S + \rho S 2h, & \text{per } |z| \geq h \end{cases}$$

da cui

$$D_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2}\frac{z}{|z|} + \rho\, z, & \text{per } |z| < h \\ \left(\frac{\sigma}{2} + \rho h\right)\frac{z}{|z|}, & \text{per } |z| \geq h \end{cases}$$

e quindi

$$E_z = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0\epsilon_r}\left(\sigma\frac{z}{|z|} + 2\rho z\right), & \text{per } |z| < h \\ \frac{\sigma + 2\rho h}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}, & \text{per } |z| \geq h \end{cases}$$

Nei punti indicati il campo vale

$$E_z(z_1) = \frac{\sigma + 2\rho z_1}{2\epsilon_0\epsilon_r} = 43\,\text{kV/m}$$

$$E_z(z_2) = \frac{\sigma + 2\rho h}{2\epsilon_0} = 157\,\text{kV/m}$$

b)
La differenza di potenziale vale

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int_{z_2}^{z_1} \mathbf{E}\cdot d\ell = +\int_{z_1}^{z_2} E_z dz' = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\int_{z_1}^{h}\frac{1}{\epsilon_r}(\sigma + 2\rho z')dz' + \int_{h}^{z_2}(\sigma + 2\rho h)\,dz'\right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{\sigma(h - z_1)}{\epsilon_r} + \frac{\rho(h^2 - z_1^2)}{\epsilon_r} + (\sigma + 2\rho h)(z_2 - h)\right) = 12\,\text{kV} \end{aligned}$$

c)
Le cariche di polarizzazione volumiche possono essere calcolate ricordando che

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D}$$

e

$$\rho_v = -\nabla\cdot\mathbf{P} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\nabla\cdot\mathbf{D} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho = -2.4\times 10^{-6}\,\text{C/m}^3$$

d)
Le cariche di polarizzazione di superficie valgono

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale uscente dal dielettrico. Usando $\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D}$, si ha, per la superficie a contatto con la lastra

$$\sigma_{p1} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{\sigma}{2} = -4.5\times 10^{-7}\,\text{C/m}^2$$

Per la superficie a contatto con il vuoto

$$\sigma_{p2} = +\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{\sigma + 2\rho h}{2} = 8.3 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$$

e)
La densità di energia elettrostatica e vale

$$u_{\mathrm{es}} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0\epsilon_r}$$

da calcolare per $z = z_1$. Dato che $D(z_1) = \sigma/2 + \rho z_1$, si ha

$$u_{\mathrm{es}} = \frac{(\sigma/2 + \rho z_1)^2}{2\epsilon_0\epsilon_r} = 0.020\,\mathrm{J/m^3}$$