Prova di Esonero Elettromagnetismo - 03.06.2022

(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Un elettromagnete toroidale è costituito da due semitori uguali di materiale ferromagnetico con una permeabiltà magnetica relativa $\mu_r = 200$, con sezione quadrata di lato $a = 4\,\text{cm}$, raggio interno $r_1 = 8$ cm, raggio esterno $r_2 = 12$ cm. Su ciascun semitoro sono avvolte $N = 50$ spire, distribuite uniformemente lungo il semitoro e percorse da una corrente costante $i = 10\,\text{A}$.

Nella ragionevole ipotesi che le linee di campo siano circonferenze centrate sull'asse del toro, si determinino:

a) i campi H, B, M in funzione della distanza r dall'asse del toro;

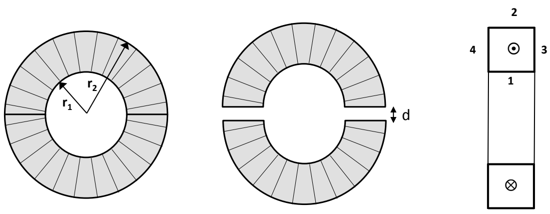
b) le densità delle correnti amperiane di superficie e di volume. Nel caso di quelle di superficie si mostrino le direzioni e i versi sulle quattro superfici del toro indicate in figura e si diano, dove possibile, i valori numerici;

c) le correnti amperiane di superficie e di volume presenti nel toro ferromagnetico. Per quelle superficiali se ne diano i valori sulle quattro superfici;

Successivamente, assumendo per ogni valore di r i campi B ed H uguali ai rispettivi valori al centro della sezione del toro, si determini:

d) la forza esterna da applicare ai due semitori quando tra essi sono presenti due traferri uguali di spessore $d = 1$ cm.

e) Non richiesto nel compito ma suggerito per esercizio: Si determini la forza della domanda d) senza l'approssimazione del campo al centro della sezione.



Esercizio 2

Al centro di una spira circolare S_1 di raggio $b = 10\,\text{cm}$ e resistenza $R_1 = 5.0\,\Omega$, è posta una bobina S_2 quadrata di lato $a = 5\,\text{mm}$ consistente in $N = 500$ spire e resistenza complessiva $R_2 = 20\,\Omega$, che può ruotare intorno all'asse indicato in figura.

a) Si determini il coefficiente di mutua induzione $\mathcal{M}$ tra la spira e la bobina in funzione dell'angolo θ tra le normali n_1 ed n_2 e se ne calcoli il valore massimo.

Ad un certo istante la bobina S_2 viene messa in rotazione a velocità angolare costante pari a $\omega = 1200\,\text{rad/s}$. Nello stesso istante viene connessa ad un generatore che eroga una tensione costante $V_2 = 120\,\text{V}$. Determinare in queste condizioni e trascurando l'autoinduzione in ciascuna spira:

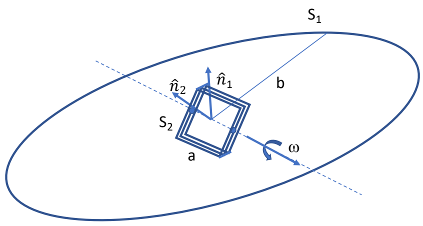
b) la corrente indotta in S_1 in funzione del tempo, e il valore massimo assunto $I_1^{\max}$;

c) l'energia dissipata U_{diss} sulla spira S_1 per ogni giro della bobina S_2.

Successivamente la bobina S_2 viene sconnessa dal generatore e viene mantenuta in rotazione con la stessa velocità angolare ω. La spira S_1 viene ora connessa ad un generatore di tensione $V_1 = 120\,\text{V}$. Nella nuova condizione si determini:

d) la corrente I_2 che scorre in S_2 in funzione del tempo;

e) il momento meccanico M che è necessario applicare alla bobina S_2 perché sia mantenuta in rotazione, calcolandone il valore massimo ($M_{\max}$).



Soluzione Esercizio 1

a)

Usiamo coordinate cilindriche con asse z l'asse del toro.

Applicando il teorema della circuitazione per il campo H:

$$2\pi r\, H = 2\, N\, i \qquad\qquad \vec{H} = \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_r \mu_0 N i}{\pi}\frac{1}{r}\hat{\varphi}$$

$$\vec{M} = \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\hat{\varphi} = (\mu_r - 1)\frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\,\hat{\varphi}$$

b)

Densità di corrente amperiana di volume: $\vec{J}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$.

Essendo il materiale isotropo e omogeneo la densità di corrente è nulla come si verifica facilmente:

$$\vec{M}\left(0,\ \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r},\ 0\right)$$

$$J_{mv_r} = \frac{1}{r}\frac{\partial M_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial z} = 0 \qquad\qquad J_{mv_\varphi} = \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} = 0$$

$$J_{mv_z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, M_\varphi) - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} = 0$$

Densità di corrente amperiana di superficie: $\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}_e$.

- Sulla superficie 1 dove $r = r_1$ e $\hat{n}_e = -\hat{r}$:

$$\vec{J}_{ms}(r_1) = \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r_1}\,\hat{z} \qquad\qquad J_{ms}(r_1) = 3.96 \times 10^5 \text{ A/m}$$

- Sulla superficie 2 dove $r = r_2$ e $\hat{n}_e = \hat{r}$:

$$\vec{J}_{ms}(r_2) = -\chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r_2}\,\hat{z} \qquad\qquad J_{ms}(r_2) = 2.64 \times 10^5 \text{ A/m}$$

- Sulla superficie 3 a distanza r dall'asse con $\hat{n}_e = \hat{z}$:

$$\vec{J}_{ms}(r) = \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\,\hat{r}$$

- Sulla superficie 4 a distanza r dall'asse con $\hat{n}_e = -\hat{z}$:

$$\vec{J}_{ms}(r) = -\chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\,\hat{r}$$

c)

Correnti amperiane di superficie:

- sulla superficie 1:

$$I_{ms_1} = J_{ms}(r_1)\, 2\pi\, r_1 = \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r_1}\, 2\pi\, r_1 = 2\, \chi_m\, N i = 1.99 \times 10^5 \text{ A}$$

- sulla superficie 2:

$$I_{ms_2} = J_{ms}(r_2)\, 2\pi\, r_2 = \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r_2}\, 2\pi\, r_2 = 2\, \chi_m\, N i$$

- sulle superfici 3 e 4:

$$I_{ms_r} = J_{ms}(r)\, 2\pi\, r = \chi_m \frac{N i}{\pi}\frac{1}{r}\, 2\pi\, r = 2\, \chi_m\, N i$$

d)

Il centro della sezione si trova ad un raggio $r_c = (r_1 + r_2)/2$. Quando lo spessore dei traferri è x possiamo scrivere la circuitazione del campo H:

$$2\pi\, r_c\, H + 2x\, H_0 = 2Ni$$

e sostituendo: $B = \mu\, H$ e $B = \mu_0\, H_0$:

$$2\pi\, r_c\, \frac{B}{\mu} + 2x\, \frac{B}{\mu_0} = 2Ni$$

$$B = \frac{Ni\mu_r\mu_0}{\pi\, r_c + \mu_r\, x}$$

Il flusso di B nel circuito magnetico è:

$$\Phi(B) = a^2\, B = \frac{Ni\mu_r\mu_0\, a^2}{\pi\, r_c + \mu_r\, x}$$

Il flusso concatenato con le $2N$ spire avvolte sul toroide è: $\Phi_{2N} = 2N\,\Phi$ e quindi l'energia magnetica nel toroide è:

$$U_m = \frac{1}{2}\,\Phi_{2N}\, i = \frac{1}{2}\,\frac{2N^2\, i^2\mu_r\mu_0\, a^2}{\pi\, r_c + \mu_r\, x} = \frac{N^2\, i^2\mu_r\mu_0\, a^2}{\pi\, r_c + \mu_r\, x}$$

Si può trovare l'energia anche dalla densità di energia per il volume:

$$U_m = \left(\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}\right)(2\pi\, r_c)\, a^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right) 2x\, a^2$$

$$U_m = \frac{B^2 a^2}{\mu_0\mu_r}\,(\pi r_c + \mu_r x) = \frac{N^2\, i^2\mu_r\mu_0\, a^2}{\pi\, r_c + \mu_r\, x}$$

La forza magnetica tra le espansioni polari dei semitori a distanza x è:

$$F_m(x) = \frac{dU_m}{dx} = -\frac{N^2\, i^2\mu_r^2\mu_0\, a^2}{(\pi\, r_c + \mu_r\, x)^2}$$

La forza esterna da applicare per mantenerli a distanza d è:

$$F_e = -F_m(d) = \frac{N^2\, i^2\mu_r^2\mu_0\, a^2}{(\pi\, r_c + \mu_r\, d)^2} = 3.75\ \mathrm{N}$$

e)

Consideriamo il toroide come il parallelo di tanti toroidi elementari di raggio r ognuno con riluttanza:

$$d\,\frac{1}{R_t} = \frac{\mu\, dS}{2\pi r} = \frac{\mu\, a\, dr}{2\pi r}$$

Integrando:

$$\frac{1}{R_t} = \frac{\mu a}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu a}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}$$

$$R_t = \frac{2\pi}{\mu\, a\log\frac{r_2}{r_1}}$$

La riluttanza magnetica dei due traferri in aria è:

$$R_a = \frac{2x}{\mu_0 a^2}$$

La riluttanza totale è:

$$R_T = R_t + R_a$$

Dalla legge di Hopkinson il flusso di B risulta:

$$\Phi = \frac{2Ni}{R_T}$$

L'energia magnetica è:

$$U_m = \frac{1}{2}\,\Phi_{2N} i = \frac{1}{2}\,\frac{(2Ni)^2}{R_T}$$

La forza magnetica è:

$$F_m = \frac{dU_m}{dx} = -\frac{1}{2}\,\frac{(2Ni)^2}{R_T^2}\,\frac{2}{\mu_0 a^2}$$

Soluzione Esercizio 2

(a) Per determinare il coefficiente di mutua induzione, risulta conveniente in questo caso assumere una corrente sulla spira S_1 e calcolare il flusso del campo magnetico B_1 prodotto dalla corrente sulla spira S_1 concatenato con la bobina S_2, assumendo che il campo prodotto dalla spira sulla superficie della bobina sia costante e pari al campo al centro della spira. Si ottiene in questo modo

$$\mathcal{M} = \frac{\phi_2(B_1)}{I_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2b} N a^2 \cos\theta \frac{1}{I_1} = \frac{\mu_0 N a^2}{2b} \cos\theta \tag{1}$$

Il valore massimo è quindi

$$\mathcal{M} = \frac{\mu_0 N a^2}{2b} = 78.5 \times 10^{-9}\,\mathrm{H}$$

(b) La corrente che fluisce nella spira S_1 quando sulla bobina scorre la corrente I_2 e la bobina ruota con velocità angolare ω si ottiene applicando la legge di Faraday-Neumann:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} f_i = \frac{1}{R_1}\Big(- \frac{d\phi_1(B_2)}{dt}\Big) \tag{2}$$

Trascurando la mutua induzione di I_1 su S_2 la corrente che scorre sulla bobina sarà costante e pari a:

$$I_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

riscriviamo quindi l'eq.2, approfittando della simmetria dei coefficienti di mutua induzione e ponendo $\theta = \omega t$. Otteniamo

$$I_1 = \frac{1}{R_1}\Big(- \frac{d(\mathcal{M} I_2)}{dt}\Big) = \frac{1}{R_1} \frac{\mu_0 N a^2}{2b} \frac{V_2}{R_2} \omega \sin(\omega t)$$

Il valore massimo della corrente viene ottenuto all'istante di tempo t^*:

$$t^* = \frac{\pi}{2\omega}$$

ed assume il valore:

$$I_1^{max} = \frac{\mu_0 N a^2 V_2 \omega}{2b R_1 R_2} = 1.13 \times 10^{-4}\,\mathrm{A}$$

(c) La potenza W dissipata sulla spira S_1 sarà una funzione del tempo:

$$W(t) = I_1(t)^2 R_1 = \frac{\mu_0^2 N^2 a^4 V_2^2 \omega^2}{4b^2 R_1 R_2^2} \sin^2(\omega t)$$

Per ottenere l'energia dissipata integriamo in un intervallo di tempo corrispondente ad un giro di S_2, cioé tra t=0 e t=$2\pi/\omega$. Otteniamo:

$$U_{diss} = \int_0^{2\pi/\omega} W(t) dt = \frac{\mu_0^2 N^2 a^4 V_2^2 \omega^2}{4b^2 R_1 R_2^2} \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \frac{\mu_0^2 N^2 a^4 V_2^2 \omega \pi}{4b^2 R_1 R_2^2} = 1.67 \times 10^{-10}\,\mathrm{J}$$

(d) In questa seconda fase, per calcolare la corrente indotta sulla bobina S_2 possiamo di nuovo utilizzare il coefficiente di mutua induzione calcolato nel punto (a) (vedi Eq.1). La corrente I_1, assumendo di nuovo trascurabile la mutua induzione di I_2 su S_1 risulta costante e pari a:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}$$

e, di nuovo, ponendo $\theta = \omega t$ si ottiene

$$I_2 = \frac{1}{R_2}\Big(- \frac{d(M I_1)}{dt}\Big) = \frac{1}{R_2} \frac{\mu_0 N a^2}{2b} \frac{V_1}{R_1} \omega \sin(\omega t)$$

(e) Il momento meccanico necessario per mantenere in rotazione la bobina può essere calcolato in diversi modi. Possiamo considerare le forze che agiscono sui due rami della bobina paralleli all'asse di rotazione, che sperimentano delle forze uguali e contrarie calcolabili tramite la seconda formula di Laplace. Il modulo di tali forze magnetiche F_M risulta pari a:

$$|F_M| = I_2 N a B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 N a}{2b}$$

e il momento meccanico M ad esse associate sarà:

$$|M| = 2|F_M|\frac{a}{2}\sin(\omega t) = \frac{\mu_0^2 N^2 a^4 V_1^2 \omega}{4b^2 R_1^2 R_2}\sin^2(\omega t) \tag{3}$$

Il massimo valore del momento è dato dunque da:

$$|M_{\max}| = \frac{\mu_0^2 N^2 a^4 V_1^2 \omega}{4b^2 R_1^2 R_2} = 2.13 \times 10^{-10}\,\mathrm{Nm}$$

In alternativa si può uguagliare la potenza erogata dal momento esterno nel moto rotatorio uniforme all'energia dissipata nella bobina. Si ottiene in questo modo:

$$|M|\omega = I_2^2 R_2 = \frac{1}{R_2}\frac{\mu_0^2 N^2 a^4}{4b^2}\frac{V_1^2}{R_1^2}\omega^2\sin^2(\omega t)$$

da cui ricaviamo agevolmente l'andamento di $|M|$ che corrisponde a quello ricavato a partire dalle forze e mostrato in Eq.3.