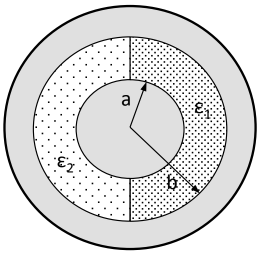
Prova Scritta Elettromagnetismo - 24.06.2022

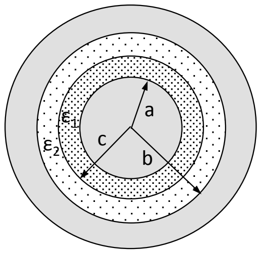
(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.
Per recuperare la prima prova di esonero, risolvere il primo esercizio in 1 ora e 30 minuti.
Per recuperare la seconda prova di esonero, risolvere il secondo esercizio in 1 ora e 30 minuti.

Esercizio 1

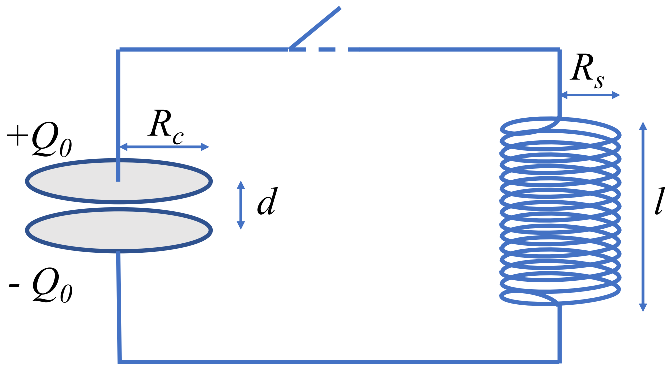
Un conduttore sferico di raggio $a = 5.0\,\mathrm{cm}$ è circondato da uno strato conduttore di raggio interno $b = 10\,\mathrm{cm}$. Lo spazio tra i due conduttori è riempito con due semigusci dielettrici di costanti dielettriche relative $\epsilon_{r1} = 5$ e $\epsilon_{r2} = 2$ come in figura. Sul conduttore interno è depositata una carica $Q = 5.0\,\mathrm{nC}$. Si determinino:
a) il campo elettrico nei due dielettrici in funzione della distanza dal centro del sistema sferico;
b) la differenza di potenziale tra i conduttori.
Successivamente si ricavino:
c) le distribuzioni delle cariche localizzate e di polarizzazione, calcolandone le densità.
Si esamini poi la configurazione con gli stessi volumi di dielettrici disposti in due strati sferici con il dielettrico di costante ϵ_{r1} all'interno (vedi figura). Si chiami c il raggio della superficie di separazione dei due dielettrici.
Si determinino:
d) la differenza di potenziale tra i conduttori in questa nuova disposizione dei dielettrici;
e) la differenza di energia elettrostatica tra le configurazioni finale ed iniziale.





Esercizio 2

Un condensatore ad armature piane circolari di raggio $R_c = 5.4\,\mathrm{cm}$ poste a distanza $d = 0.25\,\mathrm{mm}$ l'una dall'altra è collegato ad un solenoide di sezione circolare di raggio R_s =8.4 mm e di lunghezza l =10.1 cm costituito da $N = 1000$ spire, tramite due conduttori di resistenza trascurabile, in uno dei quali è collocato un interruttore inizialmente aperto, come in figura. Prima dell'istante ($t = 0$) in cui l'interruttore viene chiuso, le due armature del condensatore sono cariche con cariche uguali e opposte $\pm Q_0 = 1.2\,\mathrm{nC}$ e nel circuito non passa corrente.
a) Si calcoli, per $t > 0$, l'andamento temporale della carica sulle armature del condensatore, e si determini l'istante di tempo t^* in corrispondenza del quale per la prima volta il condensatore risulta scarico;
b) si determini l'andamento temporale e la dipendenza dalla posizione del campo elettrico e del campo magnetico all'interno del condensatore, indicandone direzione e verso, e calcolandone i valori massimi. Si trascurino effetti tra i campi di ordine superiore al primo;
c) si determini l'andamento temporale e la dipendenza dalla posizione del campo elettrico e del campo magnetico all'interno del solenoide, indicandone direzione e verso, e calcolandone i valori massimi. Si trascurino effetti tra i campi di ordine superiore al primo;
d) si verifichi che nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = t^*$, l'energia complessivamente persa dal condensatore uguaglia quella acquistata dal solenoide, e si calcoli il valore di tale energia scambiata.



Soluzione 1
Le condizioni al contorno per l'equazione di Laplace: campo normale sulle superfici dei due conduttori equipotenziali ed eguaglianza della componente tangente, in questo caso la componente radiale, del campo elettrico sulla superficie di separazione tra i due dielettrici, suggeriscono come soluzione per il campo elettrico nei due dielettrici uno stesso campo, con direzione radiale, funzione solo della distanza r dal centro del sistema.

a)
Da $E_1 = E_2 = E$ e da $D_1 = \epsilon_1 E_1$ e $D_2 = \epsilon_1 E_2$ si ricava:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \qquad\qquad D_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_1$$

e applicando il teorema di Gauss per il vettore spostamento elettrico su una superficie di raggio r con $a < r < b$ abbiamo:

$$2\pi\, r^2\, D_1 + 2\pi\, r^2\, D_2 = Q \qquad\qquad 2\pi(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1})D_1 = Q$$

$$D_1 = \frac{\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{Q}{r^2} \qquad\qquad D_2 = \frac{\epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{Q}{r^2}$$

e per i campi:

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{Q}{r^2} \qquad\qquad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{Q}{r^2} = E_1$$

b)
Per la d.d.p. tra i due conduttori:

$$V_a - V_b = \int_a^b E\, dr = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \int_a^b \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{b-a}{ab} = 128.4 \text{ V}$$

e per la capacità del sistema:

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\, \frac{ab}{b-a}$$

In alternativa:

b)
Chiaramente, date le premesse, ciascuna delle due semisfere con diverso dielettrico è metà di un condensatore sferico. Possiamo quindi scrivere:

$$C = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = \frac{1}{2}\frac{4\pi\,\epsilon_1\, ab}{b-a} + \frac{1}{2}\frac{4\pi\,\epsilon_2\, ab}{b-a} = 2\pi\,(\epsilon_1 + \epsilon_2)\,\frac{ab}{b-a}$$

quindi la d.d.p. è:

$$V_a - V_b = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{b-a}{ab}$$

a1)
Per il campo E radiale dobbiamo aspettarci una espressione:

$$E(r) = \frac{\alpha}{r^2} \qquad\qquad \text{con } \alpha \text{ che si può determinare dalla d.d.p.}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \frac{\alpha}{r^2} dr = \alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \qquad\qquad \alpha = \frac{ab}{b-a}(V_a - V_b)$$

$$E(r) = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{ab}{b-a}\frac{V_a - V_b}{r^2} = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{ab}{b-a}\frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\frac{b-a}{ab}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\frac{Q}{r^2}$$

come trovato anche sopra.

a2)
Sui conduttori sferici ipotizzati possiamo pensare siano presenti le cariche $2Q_1$ e $2Q_2$ con la condizione $Q = Q_1 + Q_2$ ed applicare il teorema di Gauss per il vettore spostamento elettrico:

$$4\pi\, r^2\, D_1 = 2Q_1 \qquad D_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{Q_1}{r^2} \qquad \text{e similmente} \qquad D_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{Q_2}{r^2}$$

Da $2Q_1 = C_1\,(V_a - V_b)$ e $2Q_2 = C_2\,(V_a - V_b)$ si trova:

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1}\frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1}\frac{1}{r^2}\frac{1}{2}C_1\,(V_a - V_b) = \frac{1}{2\pi\,(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\frac{Q}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_2}\frac{Q_2}{r^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_2}\frac{1}{r^2}\frac{1}{2}C_2\,(V_a - V_b) = \frac{1}{2\pi\,(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\frac{Q}{r^2}$$

c)
Essendo i dielettrici omogenei e isotropi non ci sono cariche di polarizzazione di volume.
Le densità di cariche localizzate sono:

$$\sigma_1(a) = \vec{D}_1(a)\cdot\hat{r} = \frac{\epsilon_{r1}}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}\frac{Q}{2\pi a^2} = 2.27\times 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_2(a) = \vec{D}_2(a)\cdot\hat{r} = \frac{\epsilon_{r2}}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}\frac{Q}{2\pi a^2} = 9.09\times 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_1(b) = \vec{D}_1(b)\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_{r1}}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}\frac{Q}{2\pi b^2} = -5.68\times 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_2(b) = \vec{D}_2(b)\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_{r2}}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})}\frac{Q}{2\pi b^2} = -2.27\times 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

Per i vettori intensità di polarizzazione abbiamo:

$$\vec{P}_1 = \epsilon_0\chi_1\,\vec{E}_1 = \frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{\epsilon_{r1}}\,\vec{D}_1 = \frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{\epsilon_{r1}}\frac{\epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r} = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}\frac{Q}{2\pi\, r^2}\,\hat{r}$$

$$\vec{P}_2 = \epsilon_0\chi_2\,\vec{E}_2 = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{\epsilon_{r2}}\,\vec{D}_2 = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}\frac{Q}{2\pi\, r^2}\,\hat{r}$$

e per le densità di carica di polarizzazione:

$$\sigma_{1p}(a) = \vec{P}_1\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}\frac{Q}{2\pi a^2} = -1.82\times 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_{2p}(a) = \vec{P}_2\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}\frac{Q}{2\pi a^2} = -4.55\times 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_{1p}(b) = \vec{P}_1\cdot\hat{r} = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}\frac{Q}{2\pi b^2} = 4.55\times 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_{2p}(b) = \vec{P}_2\cdot\hat{r} = \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}\frac{Q}{2\pi b^2} = 1.14\times 10^{-8}\ \mathrm{C/m^2}$$

d)
Si trova facilmente che il raggio c è:

$$c = \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 8.25\ \mathrm{cm}$$

In questa configurazione il sistema si riduce a una serie di due condensatori con capacità C':

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_2'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\frac{c - a}{ac} + \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{b - c}{bc} = 2.37\times 10^{10}\ \mathrm{F^{-1}}$$

La differenza di potenziale è:

$$\Delta V' = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_1}\frac{c - a}{ac} + \frac{1}{\epsilon_2}\frac{b - c}{bc}\right) = 118.4\ \mathrm{V}$$

e)
La differenza di energia elettrostatica tra le configurazioni finale e iniziale è:

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right)Q^2 = \frac{1}{2}[\Delta V' - (V_a - V_b)]\,Q = -25.0\ \mathrm{nJ}$$

Soluzione 2

(a) A seguito della chiusura dell'interruttore, l'equazione del circuito risulta essere la seguente:

$$\frac{1}{C}Q - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad\qquad I = -\frac{dQ}{dt}$$

avendo indicato con L e C rispettivamente l'induttanza del solenoide e la capacità del condensatore. Sviluppando, si ottiene un'equazione lineare di secondo ordine in Q:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \Omega^2 Q = 0$$

con

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si tratta dell'equazione di un moto armonico di pulsazione Ω, la cui soluzione, date le condizioni iniziali specificate ($Q(t = 0) = Q_0$ e $I(t = 0) = 0$) risulta essere:

$$Q(t) = Q_0 \cos \Omega t$$

La carica si annulla per la prima volta quando si annulla il coseno, vale a dire quando:

$$\Omega t^* = \frac{\pi}{2}$$

da cui:

$$t^* = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2} = 1.48 \times 10^{-6} \text{ s}$$

avendo calcolato induttanza e capacità dai dati del problema:

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_0 \frac{\pi R_c^2}{d} = 3.24 \times 10^{-10} \text{ F} \\ L &= \mu_0 \frac{\pi R_s^2 N^2}{l} = 2.75 \times 10^{-3} \text{ H} \end{aligned}$$

(b) All'interno del condensatore vi è un campo elettrico uniforme perpendicolare alle armature:

$$\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\hat{z} = \frac{Q(t)}{S\epsilon_0}\hat{z} = \frac{Q_0}{S\epsilon_0}\cos \Omega t \hat{z}$$

in cui il versore $\hat{z}$ individua la direzione perpendicolare alle armature rivolta dall'alto verso il basso in figura. La corrente di spostamento I_s dovuta alla variazione del campo elettrico nel condensatore origina un campo magnetico. Dalla quarta equazione di Maxwell, integrando su un cerchio di raggio r centrato sull'asse del condensatore e parallelo alle armature.

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_s = \mu_0 \pi r^2 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -\mu_0 \pi r^2 \epsilon_0 \frac{Q_0 \Omega}{\pi R_c^2 \epsilon_0} \sin \Omega t \tag{1}$$

dove abbiamo calcolato la corrente di spostamento come il flusso della densità di corrente di spostamento attraverso il cerchio di raggio r. da cui, assumendo B di modulo uniforme sul cerchio, otteniamo:

$$2\pi r |B(t)| = -\mu_0 \pi r^2 \frac{Q_0 \Omega}{\pi R_c^2} \sin \Omega t$$

$$\vec{B}(t) = -\frac{\mu_0 Q_0 \Omega r}{2\pi R_c^2} \sin \Omega t \hat{\phi}$$

con $\hat{\phi}$ la direzione azimuthale orientata in verso antiorario rispetto all'orientazione positiva di $\hat{z}$.
Il massimo di E si ha all'istante iniziale $t = 0$, quello di B all'istante $t = t^*$ e al bordo del condensatore $r = R_c$:

$$E_{max} = \frac{Q_0}{\pi R_c^2 \epsilon_0} = 1.48 \times 10^4 \text{ V/m} \tag{2}$$

$$B_{max} = \frac{\mu_0 Q_0 \Omega}{2\pi R_c} = 4.71 \times 10^{-9} \text{ T} \tag{3}$$

(c) All'interno del solenoide, vi è un campo magnetico diretto come l'asse del solenoide (che chiamiamo pure $\hat{z}$ ed assumiamo rivolto verso il basso in figura) il cui verso dipende dal verso della corrente nell'avvolgimento. Assumendo per fissare le idee che le spire siano avvolte in senso anti-orario rispetto a $\hat{z}$, otteniamo il campo B:

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \frac{N}{l} I(t)\hat{z} = -\frac{\mu_0 N Q_0 \Omega}{l} \sin \Omega t \hat{z}$$

dove abbiamo utilizzato l'epressione della corrente $I(t)$ che scorre nel circuito:

$$I(t) = -Q_0 \Omega \sin \Omega t$$

Ricaviamo il campo elettrico dalla legge di Faraday-Neumann-Lenz applicata ad un cerchio di raggio r centrato sull'asse del solenoide e ad esso ortogonale.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{\pi r^2 \mu_0 N Q_0 \Omega^2}{l} \cos \Omega t$$

da cui, indicando di nuovo con $\hat{\phi}$ la direzione azimuthale all'interno del solenoide, otteniamo:

$$\vec{E}(t) = \frac{\mu_0 N Q_0 \Omega^2 r}{2l} \cos \Omega t$$

Anche nel solenoide il massimo valore di E si ha all'istante iniziale $t = 0$ e al bordo del solenoide $r = R_s$, mentre il massimo di B si ha all'istante $t = t^*$:

$$B_{max} = \frac{\mu_0 N Q_0 \Omega}{l} = 1.49 \times 10^{-5} \text{ T} \quad (4)$$

$$E_{max} = \frac{\mu_0 N Q_0 \Omega^2 R_s}{2l} = 6.27 \times 10^{-2} \text{ V/m} \quad (5)$$

(d) Calcoliamo l'energia scambiata nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = t^*$ integrando il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del condensatore (U_{cond}), e quello attraverso la superficie laterale del solenoide (U_{sole}).

$$U_{cond} = \int_0^{t^*} dt 2\pi R_c d \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{Q_0^2 \Omega d}{\pi R_c^2 \epsilon_0} \int_0^{t^*} dt \cos \Omega t \sin \Omega t \quad (6)$$

$$U_{sole} = \int_0^{t^*} dt 2\pi R_s l \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{\mu_0 \pi N^2 Q_0^2 \Omega^3 R_s^2}{l} \int_0^{t^*} dt \cos \Omega t \sin \Omega t \quad (7)$$

Per dimostrare l'uguaglianza delle due energie facciamo il rapporto (nel quale i due integrali si cancellano insieme ad altri coefficienti) e successivamente esplicitiamo l'espressione di Ω^2.

$$\frac{U_{cond}}{U_{sole}} = \frac{ld}{\mu_0 \epsilon_0 \pi^2 \Omega^2 N^2 R_s^2 R_c^2} = \frac{LCld}{\mu_0 \epsilon_0 \pi^2 N^2 R_s^2 R_c^2} \quad (8)$$

in cui, sostituendo per L e per C le espressioni date sopra, troviamo che U_{cond}/U_{sole}=1.
Per calcolare il valore numerico dell'energia trasferita occorre svolgere l'integrale:

$$\int_0^{t^*} dt \cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{1}{2\Omega}$$

da cui, sostituendo per esempio nell'espressione di U_{cond}

$$U_{cond} = U_{sole} = \frac{Q_0^2 d}{2\pi \epsilon_0 R_c^2} = 2.22 \times 10^{-9} \text{ J}$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che nell'intervallo tra t e t^*, l'energia del condensatore passa da l'energia iniziale $U_{cond,0}$ a 0, e quella del solenoide da 0 a un'energia finale $U_{sole,0}$. Si ha:

$$U_{cond,0} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

$$U_{sole,0} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L Q_0^2 \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L Q_0^2}{LC} = U_{cond,0}$$