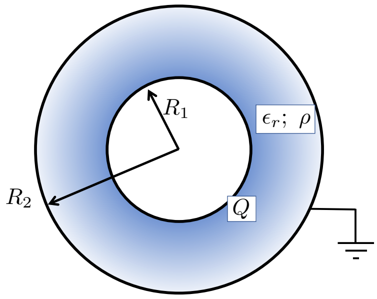
Prova Scritta Elettromagnetismo - 15.07.2022

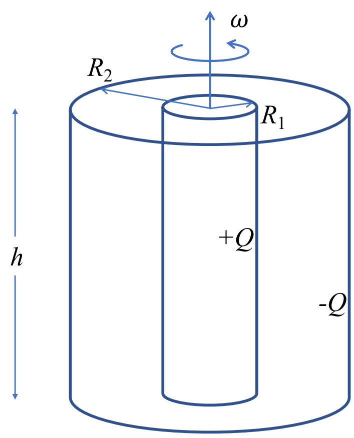
(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.
Per recuperare la prima prova di esonero, risolvere il primo esercizio in 1 ora e 30 minuti.
Per recuperare la seconda prova di esonero, risolvere il secondo esercizio in 1 ora e 30 minuti.

Esercizio 1
Un sistema elettrostatico è compreso tra due superfici sferiche conduttrici. Su quella interna di raggio $R_1 = 10$ cm è depositata una carica $Q = 10\ \mu$C mentre quella esterna di raggio $R_2 = 20$ cm è connessa a massa. Tra le due superfici si trova un materiale isolante di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4$ nel quale è distribuita una carica elettrica con densità di volume $\rho = -\alpha\, r^{-4}$ dove $\alpha = 4$ x 10^{-8} Cm ed r è la distanza dal centro del sistema.
Si determini:
a) il campo elettrico in funzione della distanza dal centro;
b) la carica sulla superficie conduttrice di raggio R_2;
c) le cariche di polarizzazione (densità e valori totali) indicando dove sono poste;
d) la somma delle cariche di polarizzazione verificando analiticamente che è nulla;
e) il potenziale del conduttore interno.



Esercizio 2
Un sistema è composto da due gusci cilindrici concentrici di materiale isolante di pari altezza $h = 120\,$cm. Sul cilindro interno, di raggio $R_1 = 15\,$cm, è distribuita in modo uniforme la carica Q; su quello esterno, di raggio $R_2 = 25\,$cm, è distribuita in modo uniforme una carica $-Q$. In prossimità della superficie del cilindro interno è presente un campo elettrico radiale di valore $E_1 = 500\,$kV/m. Si determini, in approssimazione di simmetria cilindrica e cilindro di lunghezza $h \gg R_2$:
a) le carica Q e l'andamento del campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ in funzione della distanza dall'asse del cilindro;
Il sistema viene poi messo in rotazione con velocità angolare $\omega = 2000\,$rad/s in verso antiorario come in figura. Si calcoli:
b) le densità di corrente di superficie sul cilindro interno J_1 e sul cilindro esterno J_2;
c) il campo di induzione magnetica in tutto lo spazio specificandone direzione e verso;
d) il vettore di Poynting in tutto lo spazio indicandone direzione e verso;
e) l'energia del campo elettrico U_E e l'energia del campo magnetico U_M immagazzinate nel sistema in rotazione.



Soluzione Esercizio 1

a)
Applichiamo il teorema di Gauss per $\vec{D}$ a una distanza radiale r tra i due conduttori metallici:

$$4\pi\, r^2\, D(r) = Q + Q'(r)$$

essendo $Q'(r)$ la carica distribuita nel dielettrico a distanza radiale $< r$:

$$Q'(r) = -\int_{R_1}^{r} \frac{\alpha}{r^4}\, 4\pi\, r^2 dr = -4\,\pi\alpha \int_{R_1}^{r} \frac{1}{r^2}\, dr = 4\pi\alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$$

ne segue:

$$D(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2} + \alpha\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2 R_1}\right) = \left(\frac{Q}{4\pi} - \frac{\alpha}{R_1}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}$$

e il campo elettrico è radiale con modulo:

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{Q}{4\pi} - \frac{\alpha}{R_1}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\epsilon}\frac{\alpha}{r^3}$$

b)
Sul conduttore esterno a massa per induzione elettrostatica è richiamata una carica $Q_2 = -[Q + Q'(R_2)]$:

$$Q_2 = -Q - 4\pi\alpha\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] = -7.5\ \mu\text{C}$$

c)
Il vettore intensità di polarizzazione ha solo componente radiale:

$$P_r(r) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\, E(r) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[\left(\frac{Q}{4\pi} - \frac{\alpha}{R_1}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}\right] = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[\frac{\beta}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3}\right]$$

con:

$$\beta = \frac{Q}{4\pi} - \frac{\alpha}{R_1}$$

le densità superficiali di carica di polarizzazione sono:

$$\sigma_P(R_1) = \vec{P}(R_1)\cdot(-\hat{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[\left(\frac{Q}{4\pi} - \frac{\alpha}{R_1}\right)\frac{1}{R_1^2} + \frac{\alpha}{R_1^3}\right] = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\,\frac{Q}{4\pi R_1^2} = -59.7\ \mu\text{C/m}^2$$

$$\sigma_P(R_2) = \vec{P}(R_2)\cdot(\hat{r}) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[\left(\frac{Q}{4\pi} - \frac{\alpha}{R_1}\right)\frac{1}{R_2^2} + \frac{\alpha}{R_2^3}\right] =$$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[\frac{Q}{4\pi R_2^2} - \alpha\left(\frac{1}{R_1 R_2^2} - \frac{1}{R_2^3}\right)\right] = 11.2\ \mu\text{C/m}^2$$

e le cariche di polarizzazione di superficie sono:

$$Q_{Ps}(R_1) = \sigma(R_1)\, 4\pi R_1^2 = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q = -7.5\ \mu\text{C}$$

$$Q_{Ps}(R_2) = \sigma(R_2)\, 4\pi R_2^2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[Q - \frac{4\pi\alpha}{R_1} + \frac{4\pi\alpha}{R_2}\right] = 5.6\ \mu\text{C}$$

La densità di carica di polarizzazione di volume è:

$$\rho_P(r) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 P_r) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\,\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\beta + \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\,\frac{\alpha}{r^4}$$

e il suo integrale è:

$$Q_{Pv} = \int_{R_1}^{R_2} \rho_P\, 4\pi r^2\, dr = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left[\frac{4\pi\alpha}{R_1} - \frac{4\pi\alpha}{R_2}\right] = 1.9\ \mu\text{C}$$

d)
La somma delle cariche di polarizzazione di superficie e di volume è:

$$Q_{Ptot} = Q_{SP}(R_1) + Q_{SP}(R_2) + Q_{Pv} =$$

$$-\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \left[Q - \frac{4\pi\alpha}{R_1} + \frac{4\pi\alpha}{R_2} \right] + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \left[\frac{4\pi\alpha}{R_1} - \frac{4\pi\alpha}{R_2} \right] = 0$$

e)
Il potenziale del conduttore centrale è:

$$V(R_1) = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] - \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right] =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{\alpha}{\epsilon} \left[\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_1^2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] - \frac{\alpha}{2\epsilon} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]^2 = 98.2 \text{ kV}$$

Soluzione 2

a)
Usando il teorema di Gauss per una superficie cilindrica concentrica di raggio r compreso tra R_1 e R_2 si ha

$$2\pi r h E_r = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Per $r = R_1$ si ricava che la carica totale vale

$$Q = 2\pi\epsilon_0 R_1 h E_1 = 5.0\,\mu\text{C}$$

Il campo elettrico, in approssimazione di simmetria cilindrica, vale

$$E(r) = E_1 \frac{R_1}{r} \qquad \text{per } R_1 < r < R_2$$

$$E(r) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

b)
Quando il sistema viene messo in rotazione, con velocità angolare ω e periodo $T = 2\pi/\omega$, le cariche sui cilindri generano delle correnti:

$$I_1 = +Q/T = +Q\frac{\omega}{2\pi}$$

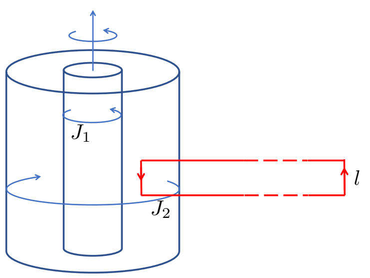
$$I_2 = -Q/T = -Q\frac{\omega}{2\pi}$$

e densità superficiale di corrente

$$J_1 = I_1/h = +Q\frac{\omega}{2\pi h} = \sigma_1 v_1 = +\epsilon_0 R_1 E_1 \omega = 1.3 \times 10^{-3}\,\text{A/m}$$

$$J_2 = I_2/h = -Q\frac{\omega}{2\pi h} = \sigma_2 v_2 = -\epsilon_0 R_1 E_1 \omega = -1.3 \times 10^{-3}\,\text{A/m}$$

c)
Sfruttando il teorema della circuitazione di Ampere, e la simmetria del sistema, è possibile ricavare il campo di induzione magnetica. In figura si illustra il percorso da scegliere per il calcolo della circuitazione, in cui si assume che il campo B sia nullo molto lontano dall'asse del sistema.



Nel tratto intermedio tra le due superfici si ha

$$B\ell = \mu_0 J_2 \ell$$

e quindi il campo tra i due cilindri è uniforme e vale

$$B(r) = \mu_0 J_2 = \mu_0 Q \frac{\omega}{2\pi h} = \mu_0 \epsilon_0 R_1 E_1 \omega = 1.67 \times 10^{-9}\,\mathrm{T} \qquad \text{per } R_1 < r < R_2$$

$$B(r) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

Il campo B è diretto verso il basso.

d) Il vettore di Poynting è presente solamente tra le due superfici cilindriche, e vale

$$\vec{I} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

di modulo

$$I = \frac{1}{\mu_0} E_1 \frac{R_1}{r} \mu_0 \epsilon_0 R_1 E_1 \omega = \epsilon_0 E_1^2 R_1^2 \frac{\omega}{r}$$

diretto su cerchi concentrici all'asse del sistema, in verso antiorario.
e) l'energia immagazzinata nel campo elettrico vale

$$U_E = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 d\tau = h \int_{R_1}^{R2} \frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_1^2 R_1^2}{r^2} 2\pi r dr = \epsilon_0 h E_1^2 \pi R_1^2 \ln(R2/R1) = 9.6 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

L'energia del campo magnetico vale

$$U_B = \int \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi (R_2^2 - R_1^2) h = 1.67 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$$