Prova Scritta Elettromagnetismo - 02.09.2022

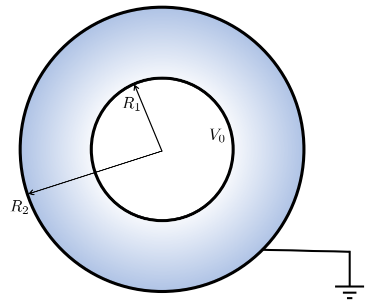
(a.a. 2021/22, C. Bini/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

Esercizio 1

Tra due superfici sferiche conduttrici di raggio $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm è distribuito un dielettrico isolante con costante dielettrica $\epsilon_r = \alpha r$ con $\alpha = 0.1$ cm^{-1} e r la distanza dal centro del sistema. La superficie interna è connessa a un generatore di potenziale $V_0 = 1000$ V mentre quella esterna è a potenziale nullo (massa). Si determinino dandone i valori numerici dove possibile:

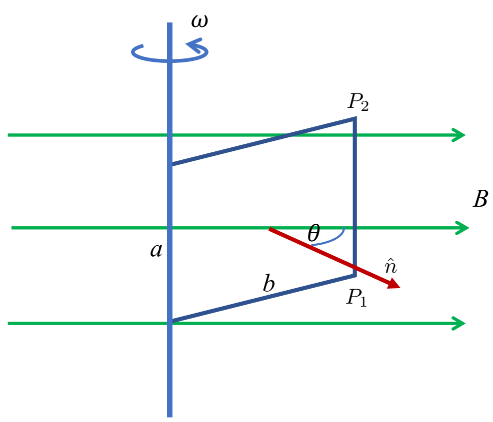
a) la carica elettrica sulla superficie interna;
b) il campo elettrico in funzione della distanza dal centro;
c) le densità di carica di polarizzazione;
d) le cariche di polarizzazione verificando algebricamente che la loro somma è nulla;
e) l'energia elettrostatica del sistema.



Esercizio 2

Una spira rettangolare di lati $a = 8.0$ cm e $b = 12.0$ cm viene messa in rotazione con velocità angolare costante $\omega = 5.0$ rad/s attorno a un lato a, come in figura. La spira è composta di materiale resistivo con resistenza per unità di lunghezza $\rho_l = 20\,\Omega$/m. Il sistema è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme, orientato ortogonalmente all'asse di rotazione, di modulo $B = 3.0$ T. Assumendo che al tempo $t = 0$ il versore $\hat{n}$ normale alla spira abbia direzione parallela al campo $\mathbf{B}$, si ricavi, in funzione del tempo e calcolando i valori massimi:

a) il flusso del campo magnetico attraverso la spira;
b) la corrente indotta nella spira trascurando l'autoinduzione;
c) la differenza di potenziale tra i punti P_1 e P_2 ai capi del lato a lontano dall'asse di rotazione;
d) il momento meccanico che deve essere esercitato dall'esterno per mantenere in rotazione la spira.



Soluzione 1

a)

Per trovare la carica sulla superficie interna possiamo calcolare la capacità C del sistema condensatore considerato come una serie di condensatori sferici di spessore infinitesimo:

$$\frac{1}{C} = \int_1^2 d\frac{1}{C} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi r^2 \epsilon} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{4\pi\epsilon_0\alpha r^3} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]$$

$$C = 8\pi\epsilon_0\alpha\,\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = 29.7\ \mathrm{pF}$$

$$Q_0 = CV_0 = 8\pi\epsilon_0\alpha\,\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,V_0 = 29.7\ \mathrm{nC}$$

In alternativa possiamo dire Q_0 la carica sull'armatura interna. Dal teorema di Gauss il vettore induzione elettrica D a distanza r dal centro è radiale e di modulo pari a:

$$4\pi r^2 D = Q_0 \qquad D = \frac{Q_0}{4\pi r^2}$$

Il modulo del campo elettrico è:

$$E(r) = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\alpha r^3} \tag{1}$$

la d.d.p. V_0 è:

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\alpha}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^3}\,dr = \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0\alpha}\left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]$$

ne segue:

$$Q_0 = 8\pi\epsilon_0\alpha\,V_0\,\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

b)

Il campo elettrico in funzione di r è dato dalla relazione (1):

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\alpha r^3}\hat{r} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{2V_0}{r^3}\hat{r}$$

c)

Il vettore intensità di polarizzazione ha la sola componente radiale:

$$P_r(r) = \epsilon_0\,(\alpha r - 1)E(r)$$

Le densità di carica superficiale sulle superfici di raggi R_1 e R_2 sono:

$$\sigma_p(R_1) = \vec{P}(R_1)\cdot(-\hat{r}) = -\epsilon_0\,(\alpha R_1 - 1)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{2V_0}{R_1^3} = 0\ \mathrm{nC/m^2}$$

$$= -(\alpha R_1 - 1)\frac{Q_0}{4\pi\alpha R_1^3} =$$

$$\sigma_p(R_2) = \vec{P}(R_2)\cdot(\hat{r}) = \epsilon_0\,(\alpha R_2 - 1)\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{2V_0}{R_2^3} = 29.5\ \mathrm{nC/m^2}$$

$$= (\alpha R_2 - 1)\frac{Q_0}{4\pi\alpha R_2^3} =$$

La densità di carica di polarizzazione di volume è (definiamo la costante A per semplificare il calcolo) :

$$A = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,2V_0$$

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 P(r)\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\epsilon_0(\alpha r - 1)\frac{A}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\epsilon_0\alpha A - \frac{\epsilon_0 A}{r}\right)$$

$$\rho_p = -\frac{\epsilon_0 A}{r^4} = -\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,\frac{2\epsilon_0 V_0}{r^4} = -\frac{Q_0}{4\pi\alpha}\,\frac{1}{r^4}$$

d)
Calcoliamo le cariche totali di polarizzazione. Nel caso delle cariche di superficie moltiplichiamo la densità per la superficie stessa, nel caso delle cariche di volume effettuiamo l'integrale.

$$Q_{pS1} = 4\pi R_1^2\, \sigma_p(R_1) = -8\pi V_0 \epsilon_0 \left(\alpha - \frac{1}{R_1}\right) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = -\frac{\alpha R_1 - 1}{\alpha R_1} Q_0 = 0 \text{ C}$$

$$Q_{pS2} = 4\pi R_2^2\, \sigma_p(R_2) = 8\pi V_0 \epsilon_0 \left(\alpha - \frac{1}{R_2}\right) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\alpha R_2 - 1}{\alpha R_2} Q_0 = 14.8 \text{ nC}$$

$$Q_{pV} = \int_{R_1}^{R_2} \rho_p(r)\, 4\pi r^2\, dr = -8\pi V_0 \epsilon_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$Q_{pV} = -8\pi V_0 \epsilon_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{Q_0}{\alpha} = -14.8 \text{ nC}$$

Si verifica facilmente che la somma algebrica di queste quantità è nulla:

$$Q_P = Q_{pS1} + Q_{pS2} + Q_{pV} = 8\pi V_0 \epsilon_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[\left(\alpha - \frac{1}{R_2}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{R_1}\right) - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] =$$

$$\frac{Q_0}{\alpha} \left[\left(\alpha - \frac{1}{R_2}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{R_1}\right) - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] = 0 \text{ C}$$

e)
L'energia elettrostatica si determina facilmente dall'espressione:

$$U_e = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 \alpha} \left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right] = 14.8\ \mu\text{J}$$

oppure integrando la densità di energia:

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} 4\pi r^2\, dr = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_0}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_0 \alpha} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^5} 4\pi r^2\, dr =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0 \alpha} \left[\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right]$$

Soluzione 2
a)
Per il calcolo del flusso del campo magnetico attraverso la spira osserviamo che per le condizioni del problema l'angolo θ tra il vettore $\vec{B}$ e la normale alla spira $\hat{n}$ è pari a ωt. Si ha pertanto:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \hat{n}\, S = Bab \cos\theta = Bab \cos(\omega t)$$

Il valore massimo del flusso è ottenuto quando la normale alla spira è parallela al campo e risulta pertanto:

$$\Phi_{\max}(\vec{B}) = Bab = 0.0288\, \text{Wb}$$

b)
La resistenza complessiva del circuito vale

$$R = 2\rho_l (a + b)$$

D'altra parte la fem indotta vale

$$fem(t) = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \omega Bab \sin(\omega t)$$

e dunque la corrente risulta pari a:

$$I(t) = \frac{fem(t)}{R} = \frac{\omega Bab \sin(\omega t)}{2\rho_l (a + b)}$$

Il valore massimo della corrente è ottenuto quando la normale alla spira è ortogonale al campo e vale

$$I_{\max} = \frac{\omega Bab}{2\rho_l (a + b)} = 18\, \text{mA}$$

c)
La fem indotta si sviluppa solo nel tratto tra P_1 e P_2, l'unico che "taglia" il campo di induzione magnetica generando quindi un campo di Lorentz diretto lungo il filo

$$\vec{E}_L = \vec{v} \times \vec{B}$$

con

$$\vec{v} = -\omega b \hat{n}$$

Gli altri tre lati del circuito non generano una fem, essendo in tutti i tre casi il vettore $\vec{E}_L$ diretto perpendicolarmente al filo. Il tratto tra P_1 e P_2 si comporta quindi come un generatore di tensione con resistenza interna $r = \rho a$. La differenza di potenziale ai suoi capi vale quindi

$$\Delta V = V_2 - V_1 = fem(t) - rI(t) = fem(t) - r\frac{fem(t)}{R} = fem(t)\left(1 - \frac{r}{R}\right) = \omega Bab\left(1 - \frac{a}{2(a+b)}\right)\sin(\omega t)$$

Il suo valore massimo è

$$\Delta V_{\max} = \omega Bab\left(1 - \frac{a}{2(a+b)}\right) = 115\,\mathrm{mV}$$

d)
Il momento meccanico necessario a mantenere in rotazione la spira può essere calcolato considerando che la potenza meccanica erogata dall'esterno deve uguagliare quella dissipata per effetto Joule:

$$M\omega = \frac{fem^2}{R}$$

per cui

$$M = \frac{fem^2}{\omega R} = \frac{\omega(Bab)^2}{2\rho_l(a+b)}\sin^2(\omega t)$$

Il valore massimo del momento è ottenuto quando la normale alla spira è ortogonale al campo magnetico e risulta pertanto:

$$M_{\max} = \frac{\omega(Bab)^2}{2\rho_l(a+b)} = 5.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{Nm}$$

In alternativa si può osservare che per mantenere in rotazione a velocità angolare costante la spira, occorre esercitare dall'esterno un momento meccanico che in ogni istante sia uguale e opposto al momento frenante dovuto all'azione congiunta del campo magnetico e della reazione vincolare sull'asse di rotazione. Se calcoliamo il momento rispetto ad un polo posto sull'asse di rotazione l'unica forza che contribuisce al momento è quella magnetica che agisce sul lato compreso tra P_1 e P_2. Tale forza è in modulo pari a:

$$F = aI(t)B = \frac{\omega a^2 b B^2 \sin(\omega t)}{2\rho_l(a+b)}$$

Essendo il braccio rispetto all'asse di rotazione pari a $b\sin(\omega t)$. Il modulo del momento risulta:

$$M = Fb\sin(\omega t) = \frac{\omega a^2 b^2 B^2 \sin^2(\omega t)}{2\rho_l(a+b)}$$

Si può associare infine al circuito un momento magnetico $\vec{m} = I(t)ab\hat{n}$ e scrivere il momento nella forma:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

di modulo

$$M = \frac{\omega Bab\sin(\omega t)}{2\rho_l(a+b)}abB\sin(\omega t) = \frac{\omega a^2 b^2 B^2 \sin^2(\omega t)}{2\rho_l(a+b)}$$

Tale momento è riferito a un asse passante per il centro della spira e parallelo all'asse di rotazione del sistema. E' peró uguale al momento meccanico totale rispetto all'asse di rotazione della spira rettangolare poiché la risultante delle forze magnetiche agenti sui quattro lati della spira è nulla e il momento della forza vincolare data dall'asse di rotazione è nullo rispetto all'asse stesso.