Prova scritta di Elettricità e Magnetismo A.A. 2005/2006

24 Marzo 2006

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci)

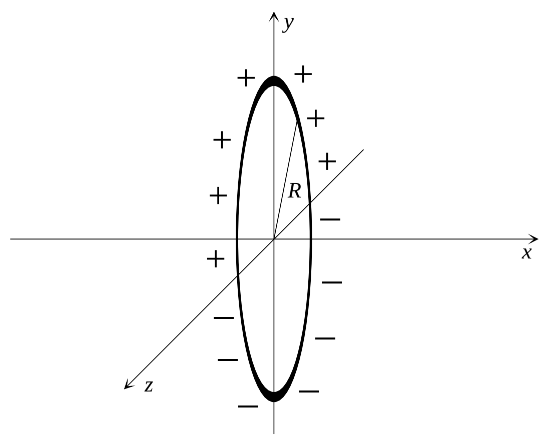
Esercizio 1

Un anello sottile di raggio $R = 12$ cm disposto sul piano yz è composto da due semicirconferenze uniformente cariche con densità lineare di carica rispettivamente $+\lambda$ (per $y > 0$) e $-\lambda$ (per $y < 0$), con $\lambda = 2.6 \cdot 10^{-8}$ C/m.
Determinare:

a) il valore del momento di dipolo $\mathbf{p}$ del sistema (specificandone direzione e verso);

b) l'espressione del campo elettrico $\mathbf{E}$ sull'asse x in approssimazione dipolare (specificandone direzione e verso);

c) l'espressione esatta (non in approssimazione di dipolo) del campo elettrico $\mathbf{E}$ al centro dell'anello.



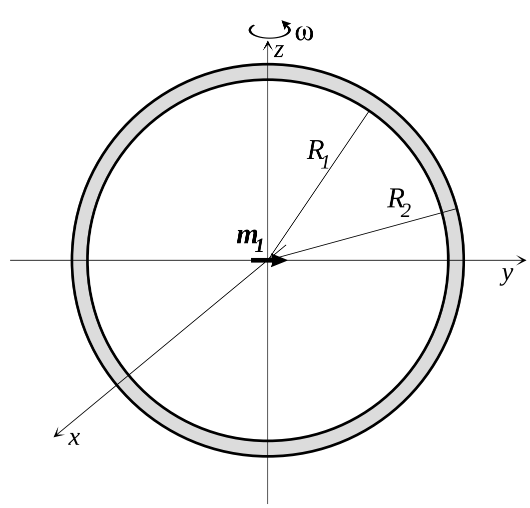
Esercizio 2

Una guscio sferico di raggi $R_1 = 10$ cm ed $R_2 = 12$ cm uniformemente carico con densità di carica $\rho = 10^{-3}$ C/m^3 ruota intorno all'asse z in senso antiorario con velocità angolare costante $\omega = 600$ rad/s.
Determinare (specificando modulo, direzione e verso):

a) il momento magnetico della superficie sferica rotante;

b) il campo magnetico al centro della superficie sferica;

c) il momento delle forze che bisogna applicare ad un piccolo ago magnetico di momento $m_1 = 18$ A m^2 situato al centro della superficie sferica e diretto lungo l'asse y perché rimanga in equilibrio.



Soluzione Esercizio 1

a) Data la simmetria del sistema il momento di dipolo $\mathbf{p}$ sarà diretto lungo l'asse y, $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}}$. Utilizzando la definizione $\mathbf{p} = \int dl\ \lambda\mathbf{r}$, si ottiene (tenendo conto del segno di λ ed indicando con α l' angolo rispetto a z del raggio del generico tratto dl di circonferenza, per cui $dl = R\ d\alpha$):

$$p = \lambda R^2 \left[\int_0^{\pi} d\alpha\ \sin\alpha - \int_{\pi}^{2\pi} d\alpha\ \sin\alpha \right] = 4\lambda R^2 \simeq\ 1.5 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C\ m}\ .$$

b) Utilizzando l'espressione di $V(\mathbf{r})$ in approssimazione dipolare $V = (4\pi\epsilon_o)^{-1}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/r^3$, possiamo scrivere le componenti del campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dalla relazione $\mathbf{E} = -\nabla V$. Tenendo conto che $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}}$, si ottiene sull'asse x (y=z=0) che l'unica componente non nulla del campo è quella lungo y, $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$:

$$E(x) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_o}\frac{1}{x^3}\ .$$

Risulta pertanto che $\mathbf{E}$ sull'asse x è diretto lungo y nel verso negativo.

c) Data la simmetria del problema l'unica componente non nulla del campo $\mathbf{E}$ sarà quella diretta lungo y, $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$. Denotando con α come al punto *a*) si ha:

$$E(x) = -\frac{2\lambda R}{4\pi\epsilon_o R^2}\int_0^{\pi} d\alpha\ \sin\alpha = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_o R}\ .$$

Soluzione Esercizio 2

a) Il momento magnetico si ottiene sommando i contributi elementari dm delle circonferenze centrate sull'asse z ad altezza $z = R\cos\theta$ e raggio $R\sin\theta$. Data la geometria del sistema il momento sarà diretto lungo z nel verso positivo: $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$. La singola circonferenza elementare ha corrente elementare $di = \omega\rho R^2 \sin\theta d\theta dR$, per cui contribuisce al momento con il termine $dm = \pi(R\sin\theta)^2 di = \pi\omega\rho R^4 \sin^3\theta d\theta dR$. Il valore totale di m si ottiene per integrazione:

$$m = \pi\omega\rho\int_{R_1}^{R_2} dR\int_0^{\pi} d\theta\ R^4\sin^3\theta = \frac{4\pi\omega\rho(R_2^5 - R_1^5)}{15} \simeq\ 7.5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{A\ m^2}\ .$$

b) Utilizzando l'espressione di $\mathbf{B}_o$ sull'asse di una spira di raggio r percorsa da corrente i ($\mathbf{B}_o = \mu_o i r^2/[2(r^2+z^2)^{3/2}]\hat{\mathbf{z}}$), si ottiene il risultato cercato integrando su tutti i contributi delle circonferenze elementari ad altezza $z = R\cos\theta$, di raggio $r = R\sin\theta$ (per cui $r^2 + z^2 = R^2$) e corrente $di = \omega\rho R^2\sin\theta d\theta dR$ (anche in tal caso il campo è diretto lungo z nel verso positivo $\mathbf{B}_o = B_o\hat{\mathbf{z}}$)

$$B_o = \int\frac{\mu_o(R\sin\theta)^2 di}{2R^3} = \frac{\mu_o\omega\rho}{2}\int_{R_1}^{R_2} dR\int_0^{\pi} d\theta\ R\sin^3\theta = \frac{\mu_o\omega\rho(R_2^2 - R_1^2)}{3} \simeq\ 1.1\cdot 10^{-9}\ \mathrm{T}\ .$$

c) Il momento delle forze esterne che bisogna applicare per mantenere l'ago in equilibrio è $\mathbf{M}_{ext} = -\mathbf{M}$, dove $\mathbf{M}$ è il momento delle forze magnetiche:

$$|\mathbf{M}_{ext}| = |\mathbf{m}_1 \wedge \mathbf{B_o}| = m_1 B_o \sin\frac{\pi}{2} = m_1 B_o \simeq\ 2.0\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N\ m}\ ,$$

diretto lungo x nel verso negativo.