Prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2005/2006

24 Marzo 2006

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, D. Trevese)

Esercizio 1

Un toro di materiale ferromagnetico di raggio $R = 30$ cm, con sezione circolare di raggio $r \ll R$, è sezionato in due parti uguali secondo un piano contenente il suo asse (Fig. 1). Le due metà vengono allontanate a una distanza d. La relazione fra induzione $\mathbf{B}$ e campo magnetico $\mathbf{H}$ all'interno del materiale è: $B = (B_R/H_C)H + B_R$, per $-H_C < H < 0$, dove $H_C = 80$ A m^{-1} è il campo coercitivo e $B_R = 5 \cdot 10^{-2}$ T è l'induzione per $H = 0$ derivante dalla magnetizzazione residua (Fig. 2).

a) Applicando al circuito magnetico la legge di Hopkinson, si determini la permeabilità magnetica relativa $\mu_r(d)$ in funzione della distanza d fra i due semi-tori.

b) Si determini l'espressione dei vettori $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{M}$ in funzione della distanza d, specificando il verso relativo.

c) Si calcoli il valore numerico del modulo dei suddetti vettori quando la distanza fra i due semi-tori è $d = 2$ mm.

d) Considerata una spira circolare di spessore trascurabile e di raggio $r_s = 1.5$ cm inserita nel traferro, con normale parallela al campo magnetico, si calcoli la forza elettromotrice indotta $f(t)$, quando la distanza d viene fatta variare secondo la legge $d(t) = v \cdot t$ con $v = 4$ mm s^{-1}, specificandone il valore numerico al tempo $t = 0.5$ s.

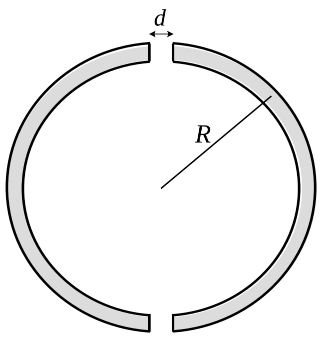


Fig. 1

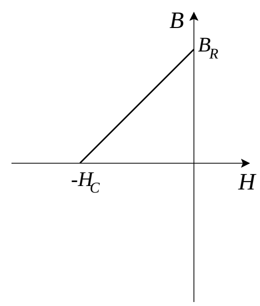


Fig. 2

Esercizio 2

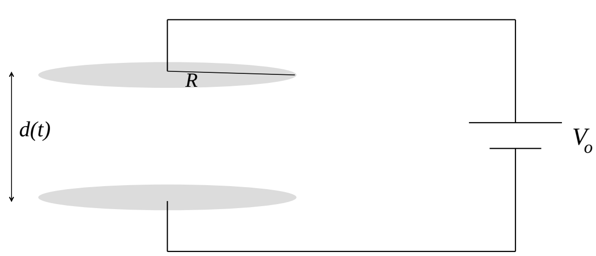
Un condensatore piano ha armature circolari di raggio $R = 20$ cm. Una delle due armature viene mantenuta in oscillazione lungo l'asse del condensatore, in modo tale che la distanza tra le armature abbia un andamento temporale secondo la legge $d = d_o/[1 + \alpha \sin(\omega t)]$, con $d_o = 5$ mm, $\alpha = 0.01$, $\omega = 2\pi/T$ e $T = 10^{-2}$ s. Ai capi del condensatore è mantenuta, tramite un generatore, una differenza di potenziale costante $V_o = 100$ V.
Determinare:

a) il vettore densità di corrente di spostamento e calcolarne il suo valore massimo;

b) l'espressione del campo di induzione magnetica B_o in funzione della posizione e del tempo all'interno del condensatore;

c) il vettore di Poynting in un punto generico all'interno del condensatore, in funzione del tempo;

d) l'energia che fluisce attraverso la parete laterale del condensatore nell'intervallo di tempo fra $t_1 = T/4$ e $t_2 = T/2$.



Soluzione Esercizio 1

a) $N \cdot i = R \cdot \Phi$, $R \equiv \Sigma_i \frac{l_i}{\mu_i S_i}$, $\quad 0 = \frac{2\pi R}{\mu_r \mu_o \pi r^2} + \frac{2d}{\mu_o \pi r^2}$, $\rightarrow \mu_r = -\pi \frac{R}{d}$

b) $\mathbf{B} = \mu_r \mu_o \mathbf{H} = -\pi \frac{R}{d} \mu_o \mathbf{H}$
$B = \frac{B_R}{H_C} H + B_R \qquad \rightarrow H = -B_R / (\frac{B_R}{H_C} + \mu_o \pi \frac{R}{d})$
$B = \mu_r \mu_o H = \frac{B_R}{1 + \frac{B_R}{\mu_o H_C} \frac{d}{\pi R}}$
$M = (\mu_r - 1) H = \frac{(\pi \frac{R}{d} + 1) B_R}{(\frac{B_R}{H_C} + \frac{\mu_o \pi R}{d})}$
all'interno del materiale ferromagnetico il campo H è opposto a B ($\mu_r < 0$) mentre lamagnetizzazione è concorde con B. Nel traferro $\mathbf{B_o}$ (che è ortogonale alla superficie di separazione dei due mezzi) è uguale a $\mathbf{B}$, la magnetizzazione è nulla e il campo $\mathbf{H_o} = \frac{\mathbf{B_o}}{\mu_o} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \mu_r H$
(Notare che $lim_{d \rightarrow 0} M \equiv M_R = \frac{B_R}{\mu_o}$)

c) $\mu_r = -\pi \frac{R}{d} = -471$
$B = B_o = 2.4 \cdot 10^{-2}$ T,
$H = 41$ A m^{-1},
$H_o = 1.9 \cdot 10^4$ A m^{-1},
$M = 1.9 \cdot 10^4$ A m^{-1}

d) $f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = B(t)^2 \frac{r_S^2 v}{\mu_o H_c R} = 1.8 \cdot 10^{-5}$ V

Soluzione Esercizio 2

a) $E_o = V_o/d = V_o(1 + \alpha \sin(\omega t))/d_o$

$J_s = \epsilon_o dE_o/dt = (\epsilon_o V_o \alpha \omega \cos(\omega t)/d_o$

Negli intervalli di tempo per i quali E_o diminuisce nel tempo, J_s ha lo stesso verso di E_o, quando E_o aumenta nel tempo, J_s ha verso opposto;

$J_s^{max} = \epsilon_o V_o \alpha \omega / d_o = 1.11 \cdot 10^{-6}$ A m^{-2}.

b) Dal teorema della circuitazione di B_o lungo un percorso circolare interno al condensatore, di raggio generico r, $B_o 2\pi r = \mu_o J_s \pi r^2$,
$B_o = \mu_o J_s r/2 = (1/2d_o) \epsilon_o \mu_o V_o \alpha \omega r \cos(\omega t)$

c) $S = (1/\mu_o) \mathbf{E_o} \wedge \mathbf{B_o}$, $\mathbf{E_o}$ e $\mathbf{B_o}$ sono perpendicolari, quindi $S(r,t) = 1/(2d_o^2) \epsilon_o V_o^2 \alpha \omega r [1 + \alpha \sin(\omega t)] \cos(\omega t)$

d) Il vettore di Poynting alla superficie laterale del condensatore è $S(R,t) = 1/(2d_o^2) \epsilon_o V_o^2 \alpha \omega R [1 + \alpha \sin(\omega t)] \cos(\omega t)$, l'energia che fluisce in un certo intervallo di tempo è il flusso di $S(R,t)$ attraverso la superficie laterale ($2\pi R d$) integrato nel tempo, quindi

$$U = \frac{1}{d_o} \epsilon_o V_o^2 \alpha \omega R^2 \pi \int_{T/4}^{T/2} dt \ \cos(\omega t) = -\frac{1}{d_o} \epsilon_o V_o^2 \alpha R^2 \pi \simeq -2.2 \cdot 10^{-8} \text{ J} .$$