Secondo compito di esonero del Corso di Elettricità e Magnetismo a.a. 2005/2006

17 Marzo 2006

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci)

Esercizio 1

Un condensatore piano con armature quadrate di lato incognito a e distanti $h = 1\ cm$, è collegato ad un generatore di tensione $\Delta V = 1.7 \cdot 10^5\ V$. Trascurando gli effetti di bordo, si determini

a) il valore di a, sapendo che l'energia immagazzinata dal condensatore vuoto vale $U_o = 0.8\ J$.

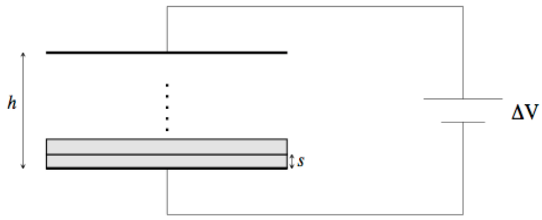
Tra le armature sono inserite gradualmente alcune lastre dello stesso materiale isolante $(\varepsilon_r = 5)$ ciascuna di spessore $s = 0.5\ mm$.

Si determini:

b) l'espressione della capacità C in funzione del numero n di lastre inserite;

c) la variazione di energia elettrostatica immagazzinata dal condensatore quando viene inserita la prima lastra;

d) il valore massimo di lastre n_{max} che si possono inserire prima di osservare la scarica del condensatore, sapendo che la rigidità dielettrica delle lastre vale $E_R = 8 \cdot 10^6$ V/m.



Esercizio 2

Una particella di massa $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$ e carica $q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ si trova all'interno di una regione di spazio in cui il campo elettrico **E** ed il campo magnetico **B** sono costanti nel tempo, uniformi, e perpendicolari tra di loro. In particolare $\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{i}}_x$ è diretto secondo l'asse x del sistema di riferimento di laboratorio. Il moto della particella è descritto in coordinate cartesiane dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(t) &= 0 \\ y(t) &= (E/\omega B)\ [\omega t - \sin \omega t] \\ z(t) &= (E/\omega B)\ [1 - \cos \omega t] \end{cases}$$

dove $E = 10^3\ V/m$ e $B = 10^{-2}\ T$ sono i moduli dei campi e $\omega = qB/m$.

Considerato il moto solo per $0 \leq t \leq 2\pi/\ \omega$, si determini:

a) la direzione e il verso del campo **E** utilizzando le equazioni del moto date;

b) la massima distanza dall'origine z_{max} che la particella raggiunge sull'asse **z** nel corso del suo moto;

Inoltre

c) si verifichi che la velocità iniziale della particella (per $t=0$) è nulla e si calcoli la velocità nel punto z_{max} determinato precedentemente;

d) si mostri che la variazione di energia cinetica fra l'istante iniziale $t=0$ e l'istante in cui la particella raggiunge z_{max} è in accordo con quanto ci si aspetta dal calcolo del lavoro compiuto dalla risultante delle forze alle quali è soggetta la particella;

e) si calcoli il lavoro compiuto dalla risultante delle forze alle quali è soggetta la particella tra i tempi $t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi/\ \omega$.

Soluzione Esercizio 1

a) L'energia immagazzinata dal condensatore vuoto è $U_o = C\Delta V^2/2$, con $C = \epsilon_o a^2/h$. Il valore di a è pertanto

$$a = \sqrt{\frac{2hU_o}{\epsilon_o \Delta V^2}} \simeq 2.5 \cdot 10^{-1} \text{ m} .$$

b) Quando sono inserite n lastre nel condensatore si ha il campo $E_o = \sigma/\epsilon_o$ nello spessore $h-ns$ vuoto ed il campo $E = \sigma/\epsilon_o\epsilon_r$ nello spessore ns occupato dalle n lastre. Scrivendo la differenza di potenziale ΔV tra le armature del condensatore come integrale del campo $\mathbf{E}$ e tenendo conto che $\sigma = Q/a^2$, si ottiene l'espressione di C in funzione di n:

$$C(n) = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_o \epsilon_r a^2}{h\epsilon_r - ns(\epsilon_r - 1)} .$$

c) L'energia immagazzinata dal condensatore quando è stata inserita la prima lastra è $U_1 = C(n=1)\Delta V^2/2$. Utilizzando l'espressione di $C(n)$ ricavata al punto precedente, si ottiene la variazione di energia rispetto al condensatore vuoto

$$\Delta U = U_1 - U_o = \frac{U_o s(\epsilon_r - 1)}{h\epsilon_r - s(\epsilon_r - 1)} \simeq 3.3 \cdot 10^{-2} \text{ J} .$$

d) La condizione da imporre è che il campo elettrico nelle lastre sia minore della rigidità dielettrica: $E < E_R$. Il campo E nelle lastre è funzione di n, e pertanto la condizione da imporre diviene:

$$E(n) = \frac{\sigma}{\epsilon_o \epsilon_r} = \frac{Q}{a^2 \epsilon_o \epsilon_r} = \frac{C(n)\Delta V}{a^2 \epsilon_o \epsilon_r} < E_R .$$

Sostituendo l'espressione di $C(n)$ trovata in precedenza si ottiene la condizione su n:

$$n < \frac{\epsilon_r h E_R - \Delta V}{E_R s(\epsilon_r - 1)} \simeq 14.4 ,$$

da cui il valore massimo di lastre che è possibile inserire senza provocare la scarica del condensatore

$$n_{max} = 14 .$$

Soluzione Esercizio 2

a) Derivando l'equazioni orarie ricaviamo sia le componenti della velocità che le componenti dell'accelerazione della particella.

$dx/dt = 0$ $\quad$ $d^2x/dt = 0$
$dy/dt = (E/B)\,[1-\cos\omega t]$, $\quad$ $d^2y/dt = \omega(E/B) \sin \omega t$
$dz/dt = (E/B) \sin \omega t$, $\quad$ $d^2z/dt = \omega(E/B) \cos \omega t$

Da queste relazioni è evidente che

1) per $t=0$ la velocità della particella è nulla e quindi <u>a $t=0$ la forza di Lorentz è nulla e sulla particella agisce solo la forza dovuta al campo elettrico.</u>
2) per $t=0$ l'unica componente dell'accelerazione non nulla è quella lungo l'asse z.

Concludiamo che il campo elettrico è diretto lungo l' asse z.

Alla stessa conclusione si poteva giungere calcolando in modo pedante l'espressione delle componenti della risultante delle forze all'istante generico t ed eguagliandole alle espressioni sopra riportate moltiplicate per la massa della particelle. In questo caso si ipotizza $\mathbf{E}=(0, E_y, E_z)$ e si pone poi $\omega=q\,B/m$ ottenendo:

$q\,[E \sin \omega t + E_y] = m\omega\,(E/B) \sin \omega t = qE \sin \omega t$

$-q\,E\,[1-\cos\omega t] + q\,E_z = m\omega\,(E/B) \cos \omega t = qE \cos \omega t$

da cui risulta evidente che le due equazioni sono compatibili solo se $E_z=E$ ed $E_y=0$.

b) Dall'equazione del moto data per $z(t)$ si evince immediatamente che il massimo valore si ottiene per $\cos\omega t = -1$, ossia $t_{max} = \pi/\omega$. Sostituendo tale valore nell'espressione di $z(t)$ si ha

$$z_{max} = z(t_{max}) = \frac{2E}{\omega B} = \frac{2mE}{qB^2} \simeq \ 0.21 \text{ m} \ .$$

c) La velocità $\mathbf{v}$ si ottiene derivando le equazioni del moto date. Per $t = 0$ si ottiene che la velocità iniziale è nulla. Per $t = t_{max} = \pi/\omega$ (tempo a cui la particella arriva a z_{max}) si ottiene $\mathbf{v} = v_{max}\hat{\mathbf{y}}$, con

$$v_{max} = \frac{2E}{B} \simeq \ 2 \cdot 10^5 \text{ m/s} \ .$$

d) La variazione dell'energia cinetica tra $t = 0$ e $t = t_{max}$ è $\Delta K = mv_{max}^2/2 = 2mE^2/B^2$. Il lavoro è dato da (il lavoro della forza magnetica è nullo)

$$\mathcal{L} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = qE \int_0^{z_{max}} dz = qEz_{max} = \frac{2mE^2}{B^2} = \Delta K \ .$$

e) Al tempo $t_2 = 2\pi/\omega$ la particella ritorna sull'asse y ($z = 0$) con velocità nulla. Pertanto il lavoro delle forze tra t_1 e t_2 è nullo (come si evince direttamente dal calcolo dell'integrale o dalla variazione nulla dell'energia cinetica).